Lineare Abbildungen - II

Eine lineare Abbildung $F : V \to W$ wird auch als (Vektorraum-) **Homomorphismus** bezeichnet.

Die Menge aller Homomorphismen $V \to W$ bezeichnen wir mit

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{F : V \to W \ : \ F \text{ ist linear}\}$.

$F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ heißt

Isomorphismus , wenn F bijektiv ist,

Monomorphismus , wenn F injektiv ist,

Epimorphismus , wenn F surjektiv ist,

Endomorphismus , wenn $V = W$,

Automorphismus , wenn $V = W$ und F bijektiv ist.

Bemerkungen.

1) (Die Komposition von linearen Abbildungen ist wieder linear)

Seien V, W, U $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F : V \to W$ und $G : W \to U$ lineare Abbildungen.

Dann ist auch die Kompostion $G \circ F : V \to U$ linear.

Beweis. $(G \circ F)(\lambda v_1 + \mu v_2) = G(F(\lambda v_1 + \mu v_2)) = G(\lambda F(v_1) + \mu F(v_2)) = \lambda G(F(v_1)) + \mu G(F(v_2)) = \lambda(G \circ F)(v_1) + \mu(G \circ F)(v_2)$ $\square$

2) Sei $F : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \to V$ linear und damit ist F^{-1} ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Aufgabe.

3) Sei $\mathrm{Aut}(V)$ die Menge der Automorphismen von V .

Dann ist $\mathrm{Aut}(V)$ eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen.

Beweis. Aufgabe. (Man bestimme dabei das neutrale Element sowie das inverse Element zu einem F)

4) Es gilt: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \lhd \mathrm{Abb}(V, W)$.

D.h. die Summe von zwei linearen Abbildungen ist wieder linear und das skalare Vielfache einer linearen Abbildung ist wieder linear.

Beweis. Seien $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist zu zeigen, dass $F + G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

Setze $H = F + G$. Dann gilt $H(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (F + G)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + G(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \lambda_1 G(v_1) + \lambda_2 G(v_2) = \lambda_1(F(v_1) + G(v_1)) + \lambda_2(F(v_2) + G(v_2)) = \lambda_1(F + G)(v_1) + \lambda_2(F + G)(v_2) = \lambda_1 H(v_1) + \lambda_2 H(v_2)$.

$(\lambda F)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda \cdot F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda \cdot (\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)) = \lambda\lambda_1 F(v_1) + \lambda\lambda_2 F(v_2) = \lambda_1(\lambda F)(v_1) + \lambda_2(\lambda F)(v_2)$. $\square$

5) Isomorphe Vektorräume sind bzgl. ihrer Struktur als Vektorräume gleich bzw. nicht unterscheidbar.

Ist $F : V \to W$ ein Isomorphismus, dann gilt etwa

- $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ linear unabhängig in V $\Leftrightarrow$ $(F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_k))$ linear unabhängig in W
- $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ Basis in V $\Leftrightarrow$ $(F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_k))$ Basis in W

Mit jeder linearen Abbildung $F : V \to W$ sind zwei wichtige Unterräume verbunden.

$\mathrm{Ker} F = F^{-1}(\{0\}) = \{v \in V \ : \ F(v) = 0\} \lhd V$ ... **Kern** von F

$\mathrm{Im} F = F(V) \lhd W$ ... **Bild** von F

Offensichtlich gilt: F ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im} F = W$.

Beobachtung. F ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} F = \{0\}$.

Beweis. "$\Rightarrow$" : Beachte, dass stets $0 \in \mathrm{Ker} F$. Sei nun $0 \neq v \in \mathrm{Ker} F$.

Wegen $F(v) = F(0) = 0$ ergibt sich ein Widerspruch zur Injektivität.

"$\Leftarrow$" : Sei $F(v_1) = F(v_2)$. Dann ist $0 = F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2)$, also $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}F$ und damit $v_1 - v_2 = 0$ bzw. $v_1 = v_2$.

Beispiele.

1) Sei $w \in \mathbb{R}^n$ fest und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $F(\lambda) = \lambda w$.

Für $w = 0$ ist $\mathrm{Ker}F = \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}F = \{0\}$. Für $w \neq 0$ ist $\mathrm{Ker}F = \{0\}$ und $\mathrm{Im}F$ eine Gerade durch 0 .

In beiden Fällen gilt $\dim\mathrm{Ker}F + \dim\mathrm{Im}F = 1 \ (= \dim\mathbb{R})$.

2) Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ mit $F(\lambda, \mu) = \lambda w_1 + \mu w_2$.

Dann ist F linear, $\mathrm{Ker}F = \{0\}$ und $\mathrm{Im}F$ eine Ebene durch 0 .

Es gilt $\dim\mathrm{Ker}F + \dim\mathrm{Im}F = 2 \ (= \dim\mathbb{R}^2)$.

3) Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit
$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, ... \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)$.

Dann ist $\mathrm{Ker}F$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\ldots \\
&\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

Eine wichtige Beziehung zwischen $\mathrm{Ker}F$ und $\mathrm{Im}F$ wird durch die Dimensionsformel ausgedrückt.

Satz. (**Dimensionsformel**)

Sei $F : V \to W$ linear und $\dim V < \infty$. Dann gilt

$\dim V = \dim \mathrm{Ker} F + \dim \mathrm{Im} F$

Beweis. Weil $\dim \mathrm{Im} F \leq \dim V < \infty$, gibt es eine endliche Basis von $\mathrm{Im} F$, etwa $(w_1, w_2, \ldots, w_r)$. Nun wähle $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ mit $F(v_i) = w_i \ \forall \ i$. Dann ist $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ linear unabhängig in V .

Wähle eine Basis $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ von $\mathrm{Ker} F$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von V ist.

Sei $v \in V$. Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sodass $F(v) = \lambda_1 w_1 + \ldots \lambda_r w_r = F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r)$.

Dann ist aber $v - (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) \in \mathrm{Ker} F$ und folglich gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$ mit $v - (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k$.

Damit ist $v = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$. Dies bedeutet, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

Sei nun $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$. Dann ist

$0 = F(0) = \mu_1 F(u_1) + \ldots + \mu_k F(u_k) + \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_r F(v_r) =$

$\lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_r F(v_r) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r$.

Weil $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig ist, gilt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Somit $\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k = 0$ und weil $(u_1, \ldots, u_k)$ linear unabhängig ist, gilt $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$.

Damit ist $\mathcal{B}$ auch linear unabhängig und somit eine Basis.

Aus $\dim \mathrm{Ker} F = k$, $\dim \mathrm{Im} F = r$ und $\dim V = r + k$ folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung.

- $\dim \mathrm{Ker} F$ heißt auch der **Defekt von** F , in Zeichen $\mathrm{def} F$.
- $\dim \mathrm{Im} F$ heißt auch der **Rang von** F , in Zeichen $\mathrm{Rg} F$.