Weitere Matrizenoperationen

1) Wie bereits erwähnt, ist $M(m\times n;\mathbb{K})$, die Menge der $m\times n$ Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{K}$, ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$.

Eine $m \times n$ Matrix ist durch $m \cdot n$ Einträge durch Elemente aus $\mathbb{K}$ festgelegt. Deshalb ist es naheliegend, nach einer Beziehung zwischen $M(m \times n;\mathbb{K})$ und dem $\mathbb{K}^{m\cdot n}$ zu fragen.

Wir betrachten die Abbildung $\Phi : M(m \times n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{m\cdot n}$ mit

$$A = (a_{ij}) \;\mapsto\; (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn})$$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \;\mapsto\; (3, 0, 1, 2, -1, 2, 1, 1, 5) \in \mathbb{R}^9$$

Offenbar ist Φ bijektiv. Wir zeigen, dass Φ auch linear ist.

Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M(m \times n;\mathbb{K})$ gilt

$\Phi(A + B) = (a_{11} + b_{11}, \ldots, a_{1n} + b_{1n}, \ldots, a_{m1} + b_{m1}, \ldots, a_{mn} + b_{mn}) =$

$(a_{11}, \ldots, a_{nm}) + (b_{11}, \ldots, b_{nm}) = \Phi(A) + \Phi(B)$

Analog wird $\Phi(\lambda A) = \lambda\Phi(A)$ gezeigt.

Somit ist Φ ein Isomorphismus !

Ist (e_{ij}) die kanonische Basis in $\mathbb{K}^{m\cdot n}$, dann ist $\Phi^{-1}(e_{ij}) = E_{ij}$. Die Urbilder der Vektoren der kanonischen Basis von $\mathbb{K}^{m\cdot n}$ liefern also die Vektoren der kanonischen Basis von $M(m \times n;\mathbb{K})$.

2) (Die transponierte Matrix)

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m\times n$ Matrix. Dann heißt die $n\times m$ Matrix ${}^tA = (a_{ji})$

die zu A **transponierte Matrix** .

${}^tA$ entsteht also aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgende Eigenschaften sind für $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ sofort nachgewiesen:

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad , \quad {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA) \quad , \quad {}^t({}^tA) = A$.

3) (Multiplikation von Matrizen)

Unter gewissen Voraussetzungen können zwei Matrizen auch multipliziert werden.

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $B = (a_{jk}) \in M(n \times r; \mathbb{K})$, d.h.

Spaltenanzahl von A $=$ **Zeilenanzahl von** B .

Dann ist die $m \times r$ Matrix $A \cdot B = (c_{ik})$ folgendermaßen definiert:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \langle a_i, b^k \rangle$$

wobei a_i den i-ten Zeilenvektor von A und b^k den k-ten Spaltenvektor von B bezeichnet, und $i = 1, 2, \ldots, m \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, r$.

$A \cdot B$ heißt das **Produkt von** A **mit** B .

Bemerkungen.

i) $A \cdot B$ ist also **nur dann** erklärt, wenn Spaltenanzahl von A $=$ Zeilenanzahl von B .

ii) Die Matrizenmultiplikation liefert somit eine Abbildung

$$M(m \times n; \mathbb{K}) \times M(n \times r; \mathbb{K}) \to M(m \times r; \mathbb{K}) \quad , \quad (A, B) \mapsto A \cdot B \ .$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Gilt $m = n = r$, dann kann sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ gebildet werden.

Im allgemeinen gilt aber, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$, d.h. die Multiplikation von Matrizen ist **nicht** kommutativ.

Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt die quadratische Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ die n**-reihige Einheitsmatrix** .

Für $E_n = (e_{ij})$ gilt offensichtlich, dass $e_{ij} = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das sog. **Kroneckersymbol** bezeichnet, i.e. $\delta_{ij} = 1$ wenn $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$.

Die nachfolgenden **Eigenschaften** und **Rechenregeln** können durch Ausrechnen von linker und rechter Seite leicht verifiziert werden.

Seien $A, A' \in M(m \times n; \mathbb{K})$, $B, B' \in M(n \times r; \mathbb{K})$, $C \in M(r \times s; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$, $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$

2) $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$

3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

4) ${}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$

5) $A \cdot E_n = A = E_m \cdot A$