Koordinatensysteme

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$.

Durch Wahl einer Basis in V wird ein sogenanntes Koordinatensystem definiert, wodurch jeder Vektor in V durch seine Koordinaten (Elementen aus $\mathbb{K}$) festgelegt ist. Dabei ist natürlich zu erwarten, dass bei Wahl einer anderen Basis ein- und derselbe Vektor andere Koordinaten haben wird.

Sei also $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von V . Dann kann jeder Vektor $v \in V$ als **eindeutige** Linearkombination der Basisvektoren $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ geschrieben werden, i.e.

$\forall\ v \in V \ \ \overset{1}{\exists}\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$.

Betrachten wir die Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to V$ mit

$$\Phi_{\mathcal{B}}((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n \ ,$$

dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist, ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ bijektiv.

Seien nun $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}(x + y) = (x_1 + y_1)v_1 + \ldots + (x_n + y_n)v_n =$

$= (x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) + (y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(x) + \Phi_{\mathcal{B}}(y)$ und

$\Phi_{\mathcal{B}}(\lambda x) = (\lambda x_1)v_1 + \ldots + (\lambda x_n)v_n = \lambda(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = \lambda \Phi_{\mathcal{B}}(x)$.

Damit ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ auch linear. $\square$

Bemerkung. Sind $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{K}^n$, dann gilt offenbar $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$.

Der Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}}$ heißt auch ein **Koordinatensystem in** V .

Zu $v \in V$ heißt $x = (x_1, \ldots, x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ der **Koordinatenvektor von** v **bzgl.** $\mathcal{B}$. Dabei gilt $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$.

Beispiele.

1) $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 0)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $v = (1, -1, 2)$ bzgl. $\mathcal{B}$.

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \quad \Rightarrow$

$(1, -1, 2) = x_1(2, -1, 3) + x_2(0, 1, 1) + x_3(1, -1, 0) =$

$= (2x_1 + x_3, -x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + x_2)$

Daraus folgt durch Vergleich der Komponenten

$1 = 2x_1 + x_3$, $-1 = -x_1 + x_2 - x_3$, $2 = 3x_1 + x_2$, und weiters

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

Somit ist $x = (1, -1, -1)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$.

2) Ist $\mathcal{B}$ die **kanonische** Basis im $\mathbb{R}^3$, dann ist der Koordinatenvektor von $v = (v_1, v_2, v_3)$ bzgl. $\mathcal{B}$ offenbar gleich (v_1, v_2, v_3) , weil

$$v = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) .$$

3) In $V = \mathbb{P}_2$ sei die Basis $\mathcal{B} = (1, 1 + t, 1 + t + t^2)$ gegeben.

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $v = 6 - t^2$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ muß damit gelten:

$6-t^2 = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (1+t) + x_3 \cdot (1+t+t^2) = (x_1+x_2+x_3) + (x_2+x_3) \cdot t + x_3 \cdot t^2$

Koeffizientenvergleich ergibt $x_3 = -1$, damit $x_2 + x_3 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 1$. Aus $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ folgt schließlich $x_1 = 6$. Also ist

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (6, 1, -1) .$$