

Rang einer linearen Abbildung

Zur Wiederholung: Ist $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, dann ist der **Rang von F** gleich

$$\operatorname{Rg}F = \dim \operatorname{Im}F .$$

Bemerkungen.

1) Stets gilt $\operatorname{Rg}F \leq \dim V$. $\operatorname{Rg}F$ kann auch " ∞ " sein (betrachte $\operatorname{id}_V : V \rightarrow V$ wobei $\dim V = \infty$) .

2) Ist $\dim V < \infty$, dann folgt aus der Dimensionsformel ($\dim V = \dim \operatorname{Ker}F + \dim \operatorname{Im}F$) sofort

$$\operatorname{Rg}F = \dim V \Leftrightarrow F \text{ ist injektiv.}$$

3) Ist $F : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus, dann gilt klarerweise $\operatorname{Rg}F = \dim V = \dim W$.

4) Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ die durch A definierte lineare Abbildung, also $x \mapsto A \cdot x$. Sei (e_1, \dots, e_n) die kanonische Basis in \mathbb{K}^n , dann wird $\operatorname{Im}L(A)$ wegen $A \cdot x = x_1 A e_1 + \dots + x_n A e_n$ aufgespannt von den Vektoren $A e_1, A e_2, \dots, A e_n$. Dies sind aber die Spalten von A .

Somit ist $\operatorname{Rg}L(A) = \text{Spaltenrang von } A$.

Damit wiederum kann nun der **Rang einer Matrix** A definiert werden durch $\operatorname{Rg}A = \operatorname{Rg}L(A) = \text{Spaltenrang von } A$.

Frage. Seien V, W endlichdimensional und $F : V \rightarrow W$ linear. Wie kann eine Basis von $\operatorname{Im}F$ (und damit auch der Rang von F) bestimmt werden ?

Sei \mathcal{A} eine Basis von V und \mathcal{B} eine Basis von W .

Setze $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.

Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{K}^m \\ \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ V & \xrightarrow{F} & W \end{array}$$

Weil Φ_A und Φ_B Isomorphismen sind, genügt es, eine Basis von $\text{Im}L(A) \triangleleft \mathbb{K}^m$ zu bestimmen. Die Bildvektoren unter Φ_B liefern dann die gesuchte Basis für $\text{Im}F$.

Wie schon erwähnt, wird $\text{Im}L(A)$ von den Spalten von A aufgespannt.

Damit: Bilde tA (dadurch werden die Spalten von A zu den Zeilen von tA), und bringe tA auf Zeilenstufenform B . Die von der Nullzeile verschiedenen Zeilen von B bilden dann eine Basis von $\text{Im}L(A)$.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $W = \mathbb{R}^5$. \mathcal{A} (bzw. \mathcal{B}) sei die kanonische Basis in \mathbb{R}^4 (bzw. \mathbb{R}^5).

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_2 - x_3, -2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -x_1 - x_3 + 2x_4)$$

Damit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\text{Rg}F = \text{Rg}B = 3$, und die Vektoren $(0, 1, -2, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 2, -1)$, $(0, 0, 0, 0, \frac{5}{2})$ sind folglich eine Basis von $\text{Im}L(A)$. Weil $W = \mathbb{R}^5$ und $\Phi_B = \text{id}_{\mathbb{R}^5}$ bilden diese Vektoren dann auch eine Basis von $\text{Im}F$.

Die folgende wichtige Aussage ist charakteristisch für endlichdimensionale Vektorräume und eine Konsequenz der Dimensionsformel ($\dim V = \dim \text{Ker} F + \dim \text{Im} F$).

Lemma. Sei $F : V \rightarrow W$ linear **und** $\dim V = \dim W < \infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) F ist injektiv,
- ii) F ist surjektiv,
- iii) F ist bijektiv.

Beweis.

i) \Rightarrow ii) : F injektiv $\Rightarrow \text{Ker} F = \{0\} \Rightarrow \dim \text{Ker} F = 0 \Rightarrow \dim W = \dim V = \dim \text{Im} F \Rightarrow W = \text{Im} F$, d.h. F ist surjektiv.

ii) \Rightarrow iii) : zu zeigen ist, dass F injektiv ist. Laut Voraussetzung ist $W = \text{Im} F$. Damit ist $\dim V = \dim W = \dim \text{Im} F$, folglich ist $\dim \text{Ker} F = 0$. Damit gilt $\text{Ker} F = \{0\}$, also ist F injektiv.

iii) \Rightarrow i) : trivial. \square

Folgerung. $F : V \rightarrow W$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$ und $\text{Rg} F = \dim W$.

Definition. Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ heißt **invertierbar** (oder **regulär**), wenn eine Matrix $A' \in M(n \times n; \mathbb{K})$ existiert, sodaß $AA' = A'A = E_n$.

Nichtinvertierbare Matrizen heißen **singulär**.

Bemerkung. Die Menge $\text{GL}(n; \mathbb{K}) = \{A \in M(n \times n; \mathbb{K}) : A \text{ ist invertierbar}\}$ ist eine **Gruppe** bzgl. der Multiplikation von Matrizen ("general linear group").

A' ist damit eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet und heißt die **inverse Matrix** zu A .

Dabei gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Falls A invertierbar ist, ist auch ${}^t A$

invertierbar und es gilt $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ (weil ${}^t(A^{-1}){}^t A = {}^t(AA^{-1}) = {}^t E_n = E_n$).

Satz. Sei $F : V \rightarrow W$ linear und $\dim V = \dim W = n < \infty$. Weiters seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Basen von V bzw. W . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) F ist ein Isomorphismus,
- 2) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ ist invertierbar.

Falls F ein Isomorphismus ist, gilt $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F^{-1}) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F))^{-1}$.

Beweis. Setze $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.

1) \Rightarrow 2) : Setze $A' = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F^{-1})$. Aus vorherigen Ergebnissen folgt, dass

$$AA' = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F \circ F^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_W) = E_n \quad \text{und}$$

$$A'A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F^{-1} \circ F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V) = E_n.$$

Dies heißt aber, dass A invertierbar ist und die Zusatzbehauptung erfüllt ist.

2) \Rightarrow 1) : Setze $G = L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(A^{-1})$. Dann ist

$$F \circ G = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) \circ L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(A^{-1}) = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(AA^{-1}) = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(E_n) = \text{id}_W \quad \text{und}$$

$$G \circ F = L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(A^{-1}) \circ L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A) = L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(A^{-1}A) = L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(E_n) = \text{id}_V.$$

Dies heißt aber, dass F bijektiv ist und $F^{-1} = G$. \square