Elementarmatrizen

Elementare Zeilenumformungen (bzw. Spaltenumformungen) können auch mittels Multiplikation mit geeigneten Matrizen (den sog. Elementarmatrizen) beschrieben werden. Elementarmatrizen entstehen durch Modifikationen der Einheitsmatrix.

Definition. Sei $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \neq j \leq m$, $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\lambda \neq 0$. Die m-reihige Einheitsmatrix werde mit $E_m = (e_{ij})$ bezeichnet.

Folgende Matrizen heißen **Elementarmatrizen** :

1) $S_i(\lambda)$: ersetze in E_m das Element "e_{ii}" durch "λ" .

2) Q_i^j : ersetze in E_m das Element "e_{ij}" durch "1" .

3) $Q_i^j(\lambda)$: ersetze in E_m das Element "e_{ij}" durch "λ" .

4) P_i^j : ersetze in E_m "e_{ii}" durch "0" , "e_{jj}" durch "0" , "e_{ij}" durch "1" und "e_{ji}" durch "1" .

Es gilt : Multiplikation einer $m \times n$ Matrix A **von links** mit einer $m \times m$ Elementarmatrix beschreibt eine elementare Zeilenumformung von A , und zwar :

i) $S_i(\lambda)A$ entsteht aus A durch Multiplikation der i-ten Zeile mit λ ,

ii) $Q_i^j A$ entsteht aus A durch Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile ,

iii) $Q_i^j(\lambda)A$ entsteht aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile ,

iv) $P_i^j A$ entsteht aus A durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile.

Beweis. Ausrechnen ! (Veranschaulichung an Tafel)

Bemerkung. Die Produkte $AS_i(\lambda)$, AQ_i^j , $AQ_i^j(\lambda)$ und AP_i^j (hier wird also A **von rechts** mit einer Elementarmatrix multipliziert) beschreiben die entsprechenden elementaren **Spaltenumformungen**, wobei im Falle einer $m \times n$ Matrix A die auftretenden Elementarmatrizen als $n \times n$ Matrizen zu betrachten sind.

Als nächstes überlegen wir uns, dass die $m \times m$ Elementarmatrizen **invertierbar (!)** sind.

Offenbar gilt $S_i(\lambda) \cdot S_i(\frac{1}{\lambda}) = S_i(\frac{1}{\lambda}) \cdot S_i(\lambda) = E_m$, also ist $S_i(\lambda)$ invertierbar und $(S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\frac{1}{\lambda})$.

Ebenso einfach zeigt sich, dass $(Q_i^j)^{-1} = Q_i^j(-1)$, $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$ und $(P_i^j)^{-1} = P_i^j$.

Bemerkung. Man rufe sich den früher erwähnten Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix in Erinnerung. Hier wurde eine $n \times n$ Matrix A (falls sie invertierbar ist) durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix übergeführt. Dieselben Operationen wurden auf der rechts stehenden Einheitsmatrix durchgeführt.

In anderen Worten: $B_k \dots B_1 A = E_n$ für geeignete Elementarmatrizen $B_1, B_2, \dots, B_k$.

Auf der rechten Seite stand am Ende $B_k \dots B_1 E_n = B_k \dots B_1$.

Dies bedeutet, dass $B_k \dots B_1 = A^{-1}$.

Eine Anwendung. Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die lineare Abbildung mit $L(A)(x) = Ax$.

Durch Wahl geeigneter Basen hat $L(A)$ eine darstellende Matrix der Form $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Also gibt es Transformationsmatrizen $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$ und $T \in M(n \times n; \mathbb{K})$ sodass $B = SAT^{-1}$.

Wie können nun S und T^{-1} bestimmt werden ?

Schritt 1 :

$$\begin{array}{cc}
E_m & A \\
B_1 E_m & B_1 A \\
\dots & \dots \\
\dots & \dots \\
B_k \dots B_1 E_m & B_k \dots B_1 A
\end{array}$$

Dabei ist $B_k \dots B_1 A$ jene Matrix, die entsteht, wenn A in Zeilenstufenform übergeführt wird.

Schritt 2 : $B_k \dots B_1 A$ kann nun durch elementare Spaltenumformungen

auf die Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gebracht werden.

Dies entspricht der Multiplikation von rechts mit geeigneten n-reihigen Elementarmatrizen.

$$\begin{array}{ccc}
B_k \dots B_1 E_m & B_k \dots B_1 A & E_n \\
 & B_k \dots B_1 A C_1 & E_n C_1 \\
 & \dots & \\
 & \dots & \\
 & B_k \dots B_1 A C_1 \dots C_l & E_n C_1 \dots C_l
\end{array}$$

Nun ist $B_k \dots B_1 A C_1 \dots C_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit

$S = B_k \dots B_1$ und $T^{-1} = C_1 \dots C_l$.

Beispiel. siehe Tafel.