Eigenwerte und Diagonalisierung

Wir wissen von früher: Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim V = n$, $\dim W = m$ und sei $F : V \to W$ linear.

Werden Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ in V bzw. W gewählt, dann hat F eine darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ bzgl. dieser Basen.

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ ist eine $m \times n$ Matrix. Die j-te Spalte von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ ist der Koordinatenvektor von $F(a_j)$ bzgl. $\mathcal{B}$, falls $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Ist $\mathrm{Rg}F = r$, dann existieren Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ in V bzw. W mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dies ist die "einfachste" Form, die eine darstellende Matrix haben kann.

Beispiel. Wir betrachten den **Endomorphismus** $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

Wählen wir in beiden Vektorräumen die kanonische Basis $\mathcal{K}$, erhalten wir $M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Wählen wir $\mathcal{A} = ((1,0),(0,1))$ und $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$, dann ist $F(a_1) = b_1$ und $F(a_2) = b_2$ und damit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$.

Was geschieht nun, wenn wir **nur eine** Basis verwenden ? Gibt es eine Basis $\mathcal{A}$, sodass $M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Wir nehmen an, es gäbe eine solche Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$. Dann wäre $F(v_1) = v_1$. Mit $v_1 = (x_1, x_2)$ würde sich ergeben, dass

$(x_1 + x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_2)$ bzw. $x_1 + x_2 = x_1$, $x_1 - x_2 = x_2$.

Dies impliziert aber, dass $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ein Widerspruch.

Dies bedeutet, dass es **keine** Basis $\mathcal{A}$ gibt mit

$M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Beachte auch, dass $\mathrm{Rg}F = 2$)

Wir stellen nun eine modifizierte Frage, nämlich ob es eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ gibt mit $M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, wo also $M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ eine **Diagonalmatrix** ist.

In diesem Fall suchen wir also Vektoren v_1, v_2 mit

$$F(v_1) = \lambda_1 v_1 \ , F(v_2) = \lambda_2 v_2$$

also Vektoren v mit der Eigenschaft $F(v) = \lambda v$.

Wir treffen den Ansatz $v = (x_1, x_2)$ und

$F(v) = F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2) = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

Dies führt zu einem homogenen Gleichungssystem

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 - x_2 = \lambda x_2 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (-1-\lambda)x_2 = 0 \end{array} .$$

Dieses homogene Gleichungssystem ist genau dann **nichttrivial** lösbar, wenn

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \ \text{ ist, also wenn } \ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \ .$$

Für $\lambda_1 = +\sqrt{2}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren v_1, v_2 sind linear unabhängig und bilden damit eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^2$.

Es gilt $F(v_1) = \sqrt{2} v_1$, $F(v_2) = -\sqrt{2} v_2$, $M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

In diesem Fall gibt es also eine Basis $\mathcal{A}$, sodass die darstellende Matrix von F bzgl. $\mathcal{A}$ eine Diagonalmatrix ist.

(Ende des Beispiels)

Die Diskussion des Beispiels führt zur **allgemeinen Fragestellung** :

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $F : V \to V$ ein Endomorphismus .

Wie muß eine Basis $\mathcal{B}$ gewählt werden, damit $M_{\mathcal{B}}(F) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ "möglichst einfach" wird ?

Die Transformationsformel für darstellende Matrizen besagt, dass zwei darstellende Matrizen A, B einer linearen Abbildung $F : V \to W$ mittels $B = SAT^{-1}$ zusammenhängen (wobei T und S (invertierbare) Transformationsmatrizen sind) . Dies führte auch zum Begriff der "äquivalenten Matrizen".

Im jetzigen Fall mit $F : V \to V$ und Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ergibt sich damit für $A = M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}}(F) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$, dass

$$B = SAS^{-1} .$$

Definition. Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n; \mathbb{K})$ heißen **ähnlich**, wenn es eine reguläre $n \times n$ Matrix S gibt mit $B = S^{-1}AS$ gibt (bzw. gleichwertig $B = SAS^{-1}$) .

Bemerkungen.

(i) Die Ähnlichkeit von $n \times n$ Matrizen ist eine Äquivalenzrelation (Beweis analog wie im Falle äquivalenter Matrizen).

(ii) Für $F : V \to V$ und Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind $A = M_{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ ähnlich.

Beispiel. (von vorher) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

$\mathcal{A} = ((1,0),(0,1))$ liefert $A = M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{B} = ((1, -1+\sqrt{2}), (1, -1-\sqrt{2}))$ liefert $B = M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Rechnung liefert

$$S = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ -1+\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \ , \ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und $B = SAS^{-1}$.

Wir beobachten weiters, dass die Spalten von S^{-1} durch die Vektoren v_1, v_2 gebildet werden !

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F : V \to V$ linear.

(i) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert (EW) von** F , wenn

$\exists\, v \in V$, $v \neq 0$ mit $F(v) = \lambda v$.

(ii) Jeder Vektor $v \neq 0$ mit $F(v) = \lambda v$ heißt **Eigenvektor (EV) von** F zum Eigenwert λ .

Bemerkung. Sei $\dim V = n < \infty$ und $F : V \to V$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

(1) $\exists$ Basis von V , welche aus Eigenvektoren von F besteht,

(2) $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V , sodass $M_{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix der Form

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Beweis. Ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Basis von V , dann sind die Spalten von $M_{\mathcal{B}}(F)$ die Koordinatenvektoren von $F(v_1), F(v_2), ..., F(v_n)$ bzgl.

$\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad F(v_i) = \lambda_i v_i \ \ \forall\, i \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ v_i ist EV von F $\forall\, i$. $\square$

Definition.

(i) $F : V \to V$ heißt **diagonalisierbar**, wenn eine der beiden vorigen Bedingungen erfüllt ist.

(ii) Eine $n \times n$ Matrix A heißt **diagonalisierbar**, wenn der zugehörige Endomorphismus $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $L_A(v) = Av$ diagonalisierbar ist ($\Leftrightarrow$ A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix) .

Bemerkung. Nicht jede Matrix (und damit nicht jeder Endomorphismus) ist diagonalisierbar.

Beispiel. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $L_A = F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, x_2) = (x_1, 5x_1 + x_2)$.

Sei nun $0 \neq v = (x_1, x_2)$ ein EV von F . Dann $\exists\, \lambda$ mit $F(v) = \lambda v$.

Also ist $(x_1, 5x_1 + x_2) = \lambda(x_1, x_2)$ bzw. $x_1 = \lambda x_1$, $5x_1 + x_2 = \lambda x_2$ bzw.

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)x_1 = 0 \\ &5x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \ . \end{aligned}$$

Dieses homogene Gleichungssystem ist nichttrivial lösbar $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{, woraus folgt, dass } \lambda = 1 \ .$$

Mit $\lambda = 1$ erhalten wir die Gleichungen $x_1 = x_1$ und $5x_1 + x_2 = x_2$, womit $x_1 = 0$ und $x_2 = t$ beliebig ist.

Damit ist $v = t \cdot (0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ und es kann **keine** Basis von $\mathbb{R}^2$ geben, welche aus Eigenvektoren von $F = L_A$ besteht.

Man beachte, dass $\lambda = 1$ der einzige EW ist. $\square$

Man kann nun zeigen:

(1) Sei $F : V \to V$ linear und seien $v_1, ..., v_m$ EV zu paarweise verschiedenen EW .

Dann sind die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_m$ linear unabhängig.

(2) Ist $\dim V = n < \infty$, $F : V \to V$ linear und $\exists$ **paarweise verschiedene** EW $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, dann ist F diagonalisierbar.

Definition. Sei $F : V \to V$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dann heißt $\mathrm{Eig}(F; \lambda) = \{v \in V \ : \ F(v) = \lambda v\}$ der **Eigenraum** von F bzgl. λ .

Bemerkungen.

1) $F(v) = \lambda v \ \Leftrightarrow \ (F - \lambda \mathrm{id}_V)(v) = 0 \ \Leftrightarrow \ v \in \mathrm{Ker}(F - \lambda \mathrm{id}_V)$

Also ist $\mathrm{Eig}(F; \lambda)$ ein Untervektorraum von V , und $\mathrm{Eig}(F; \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörigen EV von F .

2) λ ist EW von $F \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Eig}(F; \lambda) \neq \{0\} \ \Leftrightarrow \ F - \lambda \mathrm{id}_V$ **nicht** injektiv .

3) F ist nicht injektiv $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ ist EW .

4) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \Rightarrow \ \mathrm{Eig}(F; \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(F; \lambda_2) = \{0\}$.

$(v \in \mathrm{Eig}(F; \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(F; \lambda_2) \ \Rightarrow \ F(v) = \lambda_1 v \ , \ F(v) = \lambda_2 v \ \Rightarrow \ (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0 \ \Rightarrow \ v = 0)$

Sei nun $\dim V = n < \infty$, $F : V \to V$ linear und seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Basen von V .

Mit $A = M_{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ gilt wegen früher $B = SAS^{-1}$ und damit $\det B = \det(SAS^{-1}) = \det S \det A \det S^{-1} = \det A$.

Damit können wir nun die **Determinante eines Endomorphismus** F

auf eindeutige Weise durch

$$\det F = \det M_{\mathcal{A}}(F) \quad (\mathcal{A} \text{ irgendeine Basis von } V)$$

definieren.

Damit gilt : λ ist EW von F $\Leftrightarrow$ $\det(F - \lambda \mathrm{id}_V) = 0$.

(λ ist EW von F $\Leftrightarrow$ $F - \lambda \mathrm{id}_V$ ist nicht injektiv $\Leftrightarrow$ $F - \lambda \mathrm{id}_V$ ist nicht bijektiv $\Leftrightarrow$ $\det(F - \lambda \mathrm{id}_V) = 0$)

Ist darüberhinaus $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $A = M_{\mathcal{A}}(F)$, dann gilt offenbar

$$M_{\mathcal{A}}(F - \lambda \mathrm{id}_V) = A - \lambda E_n \quad \text{und} \quad \det(F - \lambda \mathrm{id}_V) = \det(A - \lambda E_n) \ .$$

Definition. Mit der Unbestimmten t heißt dann

$$P_F(t) = \det(A - tE_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix}$$

das **charakteristische Polynom** von F .

(Beachte, dass das charakteristische Polynom von F **nicht** von der Wahl der Basis $\mathcal{A}$ abhängt !)

Bemerkung. Setzen wir $P_F(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0$, dann kann man zeigen dass

$$\alpha_n = (-1)^n$$

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn}) \quad (\, a_{11} + \ldots + a_{nn} \text{ heißt } \textbf{Spur} \text{ von } A)$$

$$\alpha_0 = \det A \ .$$

Bemerkung. Das charakteristische Polynom einer (quadratischen) Matrix A ist das charakteristische Polynom des durch A definierten Endomorphismus $x \mapsto Ax$ und folglich gleich $\det(A - \lambda E_n)$.

Aufgabe. Man zeige, dass für ähnliche Matrizen $A, B \in M(n \times n; \mathbb{K})$

gilt : $P_A(t) = P_B(t)$.

Wollen wir also die Eigenwerte eines Endomorphismus bestimmen, müssen wir die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms bestimmen.

Bemerkung 1. Ist $F : V \to V$ diagonalisierbar, dann zerfällt $P_F(t)$ in Linearfaktoren.

Beweis. Laut Annahme existiert eine Basis $\mathcal{A}$ mit

$$M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Damit ist $P_F(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)...(\lambda_n - t)$. $\square$

Bemerkung 2. Sei die $n \times n$ Matrix A diagonalisierbar, i.e.

$F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $F(v) = Av$ ist diagonalisierbar.

Dann ist bekannterweise die darstellende Matrix von F bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{A}$ gleich A .

Weiters gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$, sodass $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist.

Wie früher erwähnt, gibt es dann eine invertierbare Matrix S mit $B = S^{-1}AS$, und die j-te Spalte von S ist der Koordinatenvektor von v_j bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{A}$.

Damit : Die Spalten von S sind die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$.

(Schreibt man $B = SAS^{-1}$ dann sind die Spalten von S^{-1} die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$)

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dann ist $P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 & 1 \\ -3 & -2-t & 3 \\ -2 & -2 & 3-t \end{vmatrix} = ... = -(t-1)^2(t+1)$.

Damit sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ die Eigenwerte.

Nun zur Bestimmung der Eigenvektoren bzw. Eigenräume.

- Für $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, damit $x_3 = x_1 + x_2$ und

als Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit existieren zum (doppelten) Eigenwert $\lambda = 1$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, welche den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;1)$ aufspannen.

- Für $\lambda_3 = -1$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und weiters

als Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zum (einfach auftretenden) Eigenwert gibt es also einen linear unabhängigen Eigenvektor, etwa $(1,3,2)$, welcher den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;-1)$ aufspannt.

Die Vektoren $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,3,2)$ sind linear unabhängig, damit ist A diagonalisierbar und es gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Beispiel. Gesucht sind die Eigenräume von $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, wobei

$$p(\tau) \mapsto (1+\tau)p'(\tau) - 3p(\tau) .$$

Ist $\mathcal{A} = (1, \tau, \tau^2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{P}_2$, dann ist

$F(1) = -3$, $F(\tau) = 1 - 2\tau$, $F(\tau^2) = 2\tau - \tau^2$, also

$$A = M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

EW von A : $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Zu $\lambda_1 = -1$ erhalten wir den Eigenvektor $x_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\mathrm{Eig}(F; -1) = \{p(\tau) \in \mathbb{P}_2 \ : \ p(\tau) = \nu(1 + 2\tau + \tau^2) \ , \ \nu \in \mathbb{R}\}$.

Zu $\lambda_2 = -2$ erhalten wir den Eigenvektor $x_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\mathrm{Eig}(F; -2) = \{p(\tau) \in \mathbb{P}_2 \ : \ p(\tau) = \nu(1 + \tau) \ , \ \nu \in \mathbb{R}\}$.

Zu $\lambda_3 = -3$ erhalten wir den Eigenvektor $x_{III} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\mathrm{Eig}(F; -3) = \{p(\tau) \in \mathbb{P}_2 \ : \ p(\tau) = \nu \ , \ \nu \in \mathbb{R}\}$.

Beispiel. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung des $\mathbb{R}^2$.

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - 2t\cos\alpha + 1$$

Die Nullstellen von $P_A(t)$ sind damit durch $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$ gegeben.

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \cos^2\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$.

Nur diese beiden Drehungen sind diagonalisierbar, - alle anderen Drehungen haben keine Eigenvektoren.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$P_A(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$.

Damit gibt es zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ und somit ist A diagonalisierbar.

Man rechnet leicht nach, dass

$$\mathrm{Eig}(A;1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{Eig}(A;-1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha+\pi}{2} \\ \sin\frac{\alpha+\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

Geometrische Interpretation : A beschreibt eine Spiegelung an der Geraden $\mathrm{Eig}(A;1) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,:\, Av = v\}$.

Frage. Was geschieht, wenn $P_F(t)$ mehrfache Nullstellen besitzt ? Wir bezeichnen dabei die Vielfachheit der Nullstelle λ mit $\mu(P_F;\lambda)$.

Dabei gilt stets $\mu(P_F;\lambda) \geq \dim \mathrm{Eig}(F;\lambda)$.

(algebraische Vielfachheit von λ $\geq$ geometrische Vielfachheit von λ)

Satz. Sei $F : V \to V$ linear und $\dim V = n$. Dann sind folgende

Aussagen äquivalent :

1) F ist diagonalisierbar,

2) (i) $P_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren, und

(ii) $\mu(P_F;\lambda) = \dim \operatorname{Eig}(F;\lambda) \quad \forall$ Eigenwerte λ

3) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von F , dann ist

$V = \operatorname{Eig}(F;\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Eig}(F;\lambda_k)$.

Zur konkreten Bestimmung, ob ein Endomorphismus diagonalisierbar ist, betrachten wir folgende Situation :

$F : V \to V$ linear, $\dim V = n$,

$\mathcal{A}$ eine Basis von V und $A = M_{\mathcal{A}}(F)$.

Schritt 1. Bestimme $P_F(t)$. Wenn eine Zerlegung von $P_F(t)$ in Linearfaktoren **nicht** möglich ist, dann ist F **nicht** diagonalisierbar.

Sonst

Schritt 2. Für jeden EW λ von F bestimme nun eine Basis von $\operatorname{Eig}(F;\lambda)$.

Wenn $\mu(P_F;\lambda) \neq \dim \operatorname{Eig}(F;\lambda)$, dann ist F nicht diagonalisierbar.

Wenn $\mu(P_F;\lambda) = \dim \operatorname{Eig}(F;\lambda)$, dann ist F diagonalisierbar, und die EV von F bilden eine Basis $\mathcal{B}$ von V .

Für $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ gilt dann $B = SAS^{-1}$ und die Spalten von S^{-1} sind die Koordinatenvektoren der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ bzgl. der Basis $\mathcal{A}$.

Beispiele.

1) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = Ax$.

$$P_F(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ 3 & 4-t \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 10 \ .$$

$P_F(t)$ ist in $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerlegbar, daher ist F nicht diagonalisierbar.

2) Sei $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x) = Ax$.

$P_F(t) = (5-t)t^2$, zerfällt also in Linearfaktoren (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) .

Die EW sind $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, des weiteren ist $\mu(P_F; 5) = 1$ und $\mu(P_F; 0) = 2$.

Zu $\lambda_1 = 5$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 7 \\ 0 & -8 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_I = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mu \in \mathbb{R} .$$

Damit ist $\dim \mathrm{Eig}(F; 5) = 1$.

Zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{II} = \mu \begin{pmatrix} 3/5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \mu \in \mathbb{R} .$$

Damit ist $\dim \mathrm{Eig}(F; 0) = 1 \neq \mu(P_F; 0) = 2$.

Somit ist A bzw. F nicht diagonalisierbar.

3) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 + x_3, -3x_1 - 2x_2 + 3x_3, -2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$.

Ist $\mathcal{A}$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^3$, dann ist

$$A = M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

$P_F(t) = -(t-1)^2(t+1)$, damit ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

$$\operatorname{Eig}(F;1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ , \ \operatorname{Eig}(F;-1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\ .$$

Somit $\dim \operatorname{Eig}(F;1) = 2 = \mu(P_F;1)$, $\dim \operatorname{Eig}(F;-1) = 1 = \mu(P_F;-1)$.

Folglich ist A diagonalisierbar und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ bilden eine Basis für $\mathbb{R}^3$.

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 3\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\ .$$

Definition.

1) Sei $F: V \to V$ linear, $\dim V = n$. Dann heißt F **trigonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt sodass

$$A = M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\dots & \dots & \dots & \dots\\0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \quad \text{eine obere Dreiecksmatrix ist.}$$

2) Eine $n \times n$ Matrix A heißt **trigonalisierbar**, wenn $F: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $F(x) = Ax$, trigonalisierbar ist (d.h. A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix) .

Satz. (ohne Beweis) Sei $F: V \to V$ linear, $\dim V = n$.

F trigonalisierbar $\Leftrightarrow$ $P_F(t)$ zerfällt über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren

Folgerung. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $F: V \to V$ linear.

Dann ist F trigonalisierbar.

(Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt $P_F(t)$ über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren)

Die getroffene Folgerung ist z.B. wichtig bei der Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir stellen uns die Frage ob es im Falle der Trigonalisierbarkeit "möglichst einfache" obere Dreiecksmatrizen als darstellende Matrizen gibt.

Definition. Eine $r \times r$ Matrix J heißt **Jordanmatrix zum EW** $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn J die Form besitzt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & .. & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & .. \\ .. & .. & .. & 1 \\ 0 & 0 & .. & \lambda \end{pmatrix} .$$

Damit erhält man für $r = 1 \quad J = (\lambda)$, für $r = 2 \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und

für $r = 3 \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Satz. (**Satz über die Jordansche Normalform**)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$, und sei $F : V \to V$ linear.

Dann gilt : Zerfällt $P_F(t)$ über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren, dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V , sodass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ 0 & J_2 & & \\ .. & .. & .. & \\ 0 & 0 & .. & J_l \end{pmatrix} , \text{ wobei die } J_i \text{ Jordanmatrizen sind.}$$

Man sagt, $M_{\mathcal{B}}(F)$ hat **Jordansche Normalform**.

Bemerkungen.

(i) Im allgemeinen ist die Anzahl der auftretenden Jordanmatrizen größer als die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte von F .

(ii) Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, dann lässt sich jeder Endomorphismus $F : V \to V$ durch eine Matrix in Jordanscher Normalform darstellen.