Basis und Dimension

Als nächstes wollen wir die wichtigen Begriffe "Erzeugendensystem" und "Basis" eines Vektorraums definieren.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V .

1) $(v_i)_{i\in I}$ heißt ein **Erzeugendensystem** von V , wenn $\mathrm{Span}(v_i) = V$.

2) $(v_i)_{i\in I}$ heißt **Basis** von V , wenn (v_i) ein Erzeugendensystem und linear unabhängig ist.

(Die Anzahl der Elemente einer Basis heißt die **Länge** dieser Basis und kann eventuell ∞ sein.)

Beispiele.

1) Sei $V = \mathbb{K}^n$. Wie zuvor gezeigt wurde, ist die Familie $(e_1, e_2, ..., e_n)$ mit $e_i = (0, .., 0, \underset{i-te Stelle}{1}, 0, ..0)$ linear unabhängig.

Sei nun $v = (a_1, a_2, ..., a_n) \in V$.
Dann gilt offenbar $v = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ie_i$.

Damit ist $(e_1, e_2, ..., e_n)$ auch ein Erzeugendensystem, mithin eine Basis. Sie heißt die **kanonische Basis** im $\mathbb{K}^n$.

2) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (3, -1)$, $v_2 = (4, 1)$, $v_3 = (-1, 2)$ im $\mathbb{R}^2$.

(v_1) ist linear unabhängig, aber $\mathrm{Span}(v_1) \neq \mathbb{R}^2$

(v_1, v_2, v_3) sind linear abhängig (weil $9v_1 - 5v_2 + 7v_3 = 0$) , und spannen den $\mathbb{R}^2$ auf, - sind also ein Erzeugendensystem, aber keine Basis.

Man überlege sich : (v_1, v_2) ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

3) $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum hat die (kanonische) Basis (1) , $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-

Vektorraum hat die Basis $(1, i)$.

4) $(p_0, p_1, ..., p_n)$ mit $p_i(t) = t^i$ ist Basis von $\mathbb{P}_n$.

5) Per definition ist die leere Familie Basis des Nullvektorraums $\{0\}$.

Bemerkung. Eine linear unabhängige Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist offenbar eine Basis von $\mathrm{Span}(v_i)_{i \in I}$.

Die folgende Aussage sei ohne Beweis angeführt und charakterisiert den Begriff der Basis als ein Erzeugendensystem, das nicht mehr verkleinert werden kann, bzw. als linear unabhängige Familie, die nicht mehr vergrößert werden kann.

Satz. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum V . Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

1) $(v_i)_{i \in I}$ ist Basis von V ,

2) $(v_i)_{i \in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem, d.h. $\forall J \subseteq I$, $J \neq I$ gilt $\mathrm{Span}(v_i)_{i \in J} \neq V$.

3) $(v_i)_{i \in I}$ ist eine unverlängerbare linear unabhängige Familie, d.h. $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig und jede Familie $(v_i)_{i \in J}$ mit $I \subseteq J$, $I \neq J$ ist linear abhängig.

4) $(v_i)_{i \in I}$ ist ein Erzeugendensystem und jeder Vektor $v \neq 0$ besitzt eine **eindeutige** Darstellung als Linearkombination der $(v_i)_{i \in I}$.

Folgerung. (**Basisauswahlsatz**)

Sei der $\mathbb{K}$-Vektorraum V endlich erzeugt, d.h. V besitzt ein endliches Erzeugendensystem $(v_1, v_2, ..., v_r)$. Durch sukzessives Wegnehmen von Vektoren erreicht man in endlich vielen Schritten ein unverkürzbares Erzeugendensystem.

Dies heißt, dass aus einem endlichen Erzeugendensystem eine Basis ausgewählt werden kann.

Für den später folgenden Austauschsatz von Steinitz ist folgender Hilfssatz wichtig.

Lemma. (**Austauschlemma**)

Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ eine Basis von V und sei $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$.

Gilt $\lambda_k \neq 0$, so ist $(v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_r)$ wieder eine Basis.

(Hier kann also v_k durch w ausgetauscht werden)

Beweis. oBdA (= ohne Beschränkung der Allgemeinheit) können wir den Fall $k = 1$ (bzw. $\lambda_1 \neq 0$) betrachten (ansonsten Umnumerierung der Basisvektoren).

Zu zeigen ist also, dass $(w, v_2, \ldots, v_r)$ eine Basis ist.

Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r \in \mathbb{K}$ sodass

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_r v_r \ .$$

Wegen $v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r$ ist

$$v = \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + (\mu_2 - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1}) v_2 + \ldots + (\mu_r - \frac{\mu_1 \lambda_r}{\lambda_1}) v_r \ .$$

Also ist $(w, v_2, \ldots, v_r)$ ein Erzeugendensystem.

Nun gelte $\alpha w + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r = 0$. Dann ist

$$\alpha \lambda_1 v_1 + (\alpha \lambda_2 + \alpha_2) v_2 + \ldots + (\alpha \lambda_r + \alpha_r) v_r = 0 \ .$$

Weil $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ linear unabhängig ist, gilt

$$\alpha \lambda_1 = 0 \ , \ \alpha \lambda_2 + \alpha_2 = 0 \ , \ldots , \ \alpha \lambda_r + \alpha_r = 0 \ .$$

Weil $\lambda_1 \neq 0$, ist $\alpha = 0$ und damit $\alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0$.

Dies wiederum bedeutet, dass $(w, v_2, \ldots, v_r)$ linear unabhängig ist, also eine Basis. $\square$

Sukzessive Anwendung des Austauschlemmas liefert folgende Aussage.

Satz. (**Austauschsatz von Steinitz**) (ohne Beweis)

Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V , und sei weiters

$(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ eine linear unabhängige Familie.

Dann ist $n \leq r$, und $\exists\ i_1, i_2, \ldots, i_n$ sodass v_{i_1} gegen w_1 , v_{i_2} gegen w_2 , $\ldots$, v_{i_n} gegen w_n ausgetauscht werden können und man wieder eine Basis erhält.

(D.h. $w_1, w_2, \ldots, w_n$ und geeignete Vektoren aus $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ bilden eine Basis)

Folgerung. Besitzt V eine endliche Basis, dann ist jede Basis endlich und je zwei Basen haben die gleiche Länge.

Beweis. Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ eine (endliche) Basis von V . Wegen des Austauschsatzes kann es nicht mehr als r linear unabhängige Vektoren geben.

Ist nun $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ eine weitere Basis, dann liefert die zweimalige Anwendung des Austauschsatzes $k \leq r$ und $r \leq k$, also $k = r$. $\square$

Damit kann jetzt sinnvoll die Dimension eines $\mathbb{K}$-Vektorraums erklärt werden.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \begin{cases} \infty & V \text{ hat keine endliche Basis} \\ r & V \text{ hat eine Basis mit } r \text{ Vektoren} \end{cases}$$

heißt **Dimension von** V über $\mathbb{K}$.

Bemerkungen.

1) Mittels des sogenannten Lemmas von Zorn (dies ist ein mengentheoretisches Prinzip, das als gültig angesehen wird) kann man zeigen: jede linear unabhängige Familie in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum kann zu einer Basis vergrößert werden. Dies zeigt auch, dass jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum eine Basis besitzt.

2) Sei V endlich erzeugt. Wie früher gezeigt, ist V dann endlichdimensional. Wähle eine Basis von V , etwa $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$. Zu einer gegebenen linear unabhängigen Familie $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ gilt dann $n \leq r$ und nach

geeigneter Umbenennung ist dann $(w_1, \dots, w_n, v_{n+1}, \dots, v_r)$ eine Basis.

Dies bedeutet, dass $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ zu einer Basis vergrößert werden kann (**Basisergänzungssatz**) .

3) Sei $\dim V = n < \infty$ und $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ linear unabhängig. Dann ist $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Basis.

4) Sei $W \lhd V$ und $\dim V < \infty$. Dann ist $\dim W \leq \dim V$, und wenn $\dim W = \dim V$, dann ist $V = W$.

Beispiele.

1) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ (weil $(e_1, ... e_n)$ Basis ist)

2) $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$

3) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ (Beweis zur Übung)

4) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

5) $\dim \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$ (Beweis zur Übung)

Seien $W, W' \lhd V$. Wie früher erwähnt, ist dann $W + W' \lhd V$. Man überzeugt sich leicht, dass $W + W' = \mathrm{Span}(W \cup W')$. Wir fragen nun nach der Dimension von $W + W'$. Hier gilt

Satz. (**Dimensionsformel**)
Sei $\dim V < \infty$ und $W, W' \lhd V$. Dann gilt

$$\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W') .$$

Beweis. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $W \cap W'$. Weil $W \cap W' \lhd W$ und $W \cap W' \lhd W'$, existieren nach dem Basisergänzungssatz Vektoren $w_1, \dots, w_k \in W$ und $w'_1, \dots, w'_l \in W'$ sodass $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k)$ eine Basis von W und $(v_1, \dots, v_n, w'_1, \dots, w'_l)$ eine Basis von W' ist.

Wir behaupten nun, dass $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_l)$ eine Basis von $W + W'$ ist.

i) Sei $v \in W + W'$. Es gibt also $w \in W$ und $w' \in W'$ mit $v = w + w'$. Weil w eine Linearkombination von $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k)$ und w' eine Linearkombination von $(v_1, \dots, v_n, w'_1, \dots, w'_l)$ ist, ist v eine Linearkombination von $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_l)$. Somit ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $W + W'$.

ii) Sei $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k + \mu'_1 w'_1 + \ldots + \mu'_l w'_l = 0$.

Setze $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k$. Dann gilt $v \in W$ und wegen $v = -(\mu'_1 w'_1 + \ldots + \mu'_l w'_l)$ auch $v \in W'$, also $v \in W \cap W'$.

Damit existieren aber $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_n v_n$.

Nun gilt $0 = v - v = (\lambda_1 - \lambda'_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n) v_n + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k$.

Weil $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k)$ linear unabhängig ist, gilt
$\lambda_1 = \lambda'_1$, … , $\lambda_n = \lambda'_n$, $\mu_1 = 0$, … , $\mu_k = 0$.

Damit ist $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \mu'_1 w'_1 + \ldots + \mu'_l w'_l = 0$. Weil $(v_1, \dots, v_n, w'_1, \dots, w'_l)$ linear unabhängig ist, gilt
$\lambda_1 = 0$, … , $\lambda_n = 0$, $\mu'_1 = 0$, … , $\mu'_l = 0$, womit
$(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k, w'_1, \dots, w'_l)$ linear unabhängig ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

iii) Damit gilt also $\dim(W + W') = n + k + l$, $\dim W = n + k$, $\dim W' = n + l$, $\dim(W \cap W') = n$.

Also $\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$. $\square$

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W, W' \lhd V$. Gibt es ein $0 \neq v \in W \cap W'$, dann gilt trivialerweise $v = v + 0 = 0 + v$. Dies bedeutet aber, dass die Darstellung von v als Summe eines Vektors aus W und eines Vektors aus W' **nicht** eindeutig ist.

Die Frage nach der Eindeutigkeit der Darstellung führt zum Begriff der direkten Summe.

$W + W'$ ist die **direkte Summe** von W und W' , in Zeichen $W \oplus W'$, wenn zusätzlich $W \cap W' = \{0\}$ ist.

Satz. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) Die Summe von W und W' ist direkt,

2) $\forall\ v \in W + W' \quad \overset{1}{\exists}\ w \in W \quad \overset{1}{\exists}\ w' \in W'$ mit $v = w + w'$.

Beweis.
1) $\Rightarrow$ 2) : Sei $v \in W + W'$ mit $v = w_1 + w_1'$ und $v = w_2 + w_2'$, wobei $w_1, w_2 \in W$ und $w_1', w_2' \in W'$.

Dann ist $w_1 + w_1' = w_2 + w_2'$ bzw. $w_1 - w_2 = w_2' - w_1'$.

Damit ist $w_1 - w_2 \in W \cap W'$, und laut Voraussetzung ist $w_1 - w_2 = 0$, also $w_1 = w_2$. Damit ist aber auch $w_1' = w_2'$, d.h. die Darstellung von v ist eindeutig.

2) $\Rightarrow$ 1) : Würde ein $0 \neq v \in W \cap W'$ existieren, so hätte man durch $v = v + 0 = 0 + v$ einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung. Also muß $W \cap W' = \{0\}$ sein. $\square$

Bemerkung. Ist $V = W \oplus W'$, dann ist $\dim V = \dim W + \dim W'$.

Bemerkung. Sind endlich viele Unterräume $W_1, \ldots W_r$ gegeben, dann heißt die Summe $W_1 + \ldots + W_r$ direkt, wenn jeder Vektor $v \in W_1 + \ldots W_r$ auf **eindeutige** Weise als Summe von Vektoren aus $W_1, W_2, \ldots, W_r$ dargestellt werden kann. Man schreibt $W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$.

Dies ist gleichbedeutend zu $W_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} W_j) = \{0\} \quad \forall\ i$.