

# Elementarmatrizen

Elementare Zeilenumformungen (bzw. Spaltenumformungen) können auch mittels Multiplikation mit geeigneten Matrizen (den sog. Elementarmatrizen) beschrieben werden. Elementarmatrizen entstehen durch Modifikationen der Einheitsmatrix.

**Definition.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \neq j \leq m$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  mit  $\lambda \neq 0$ . Die  $m$ -reihige Einheitsmatrix werde mit  $E_m = (e_{ij})$  bezeichnet.

Folgende Matrizen heißen **Elementarmatrizen** :

- 1)  $S_i(\lambda)$  : ersetze in  $E_m$  das Element " $e_{ii}$ " durch " $\lambda$ ".
- 2)  $Q_i^j$  : ersetze in  $E_m$  das Element " $e_{ij}$ " durch " $1$ ".
- 3)  $Q_i^j(\lambda)$  : ersetze in  $E_m$  das Element " $e_{ij}$ " durch " $\lambda$ ".
- 4)  $P_i^j$  : ersetze in  $E_m$  " $e_{ii}$ " durch " $0$ ", " $e_{jj}$ " durch " $0$ ", " $e_{ij}$ " durch " $1$ " und " $e_{ji}$ " durch " $1$ ".

**Beispiel.** Für  $m = 3$  :

$$S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_2^1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Es gilt :** Multiplikation einer  $m \times n$  Matrix  $A$  **von links** mit einer  $m \times m$  Elementarmatrix beschreibt eine elementare Zeilenumformung von  $A$ , und zwar :

- i)  $S_i(\lambda)A$  entsteht aus  $A$  durch Multiplikation der  $i$ -ten Zeile mit  $\lambda$ ,

- ii)  $Q_i^j A$  entsteht aus  $A$  durch Addition der  $j$ -ten Zeile zur  $i$ -ten Zeile ,
- iii)  $Q_i^j(\lambda)A$  entsteht aus  $A$  durch Addition der  $\lambda$ -fachen  $j$ -ten Zeile zur  $i$ -ten Zeile ,
- iv)  $P_i^j A$  entsteht aus  $A$  durch Vertauschen der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile.

**Beweis.** Ausrechnen !

**Bemerkung.** Die Produkte  $AS_i(\lambda)$  ,  $AQ_i^j$  ,  $AQ_i^j(\lambda)$  und  $AP_i^j$  (hier wird also  $A$  **von rechts** mit einer Elementarmatrix multipliziert) beschreiben die entsprechenden elementaren **Spaltenumformungen**, wobei im Falle einer  $m \times n$  Matrix  $A$  die auftretenden Elementarmatrizen als  $n \times n$  Matrizen zu betrachten sind.

Als nächstes überlegen wir uns, dass die  $m \times m$  Elementarmatrizen **invertierbar (!)** sind.

Offenbar gilt  $S_i(\lambda) \cdot S_i(\frac{1}{\lambda}) = S_i(\frac{1}{\lambda}) \cdot S_i(\lambda) = E_m$  , also ist  $S_i(\lambda)$  invertierbar und  $(S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\frac{1}{\lambda})$  .

Ebenso einfach zeigt sich, dass  $(Q_i^j)^{-1} = Q_i^j(-1)$  ,  $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$  und  $(P_i^j)^{-1} = P_i^j$  .

**Bemerkung.** Man rufe sich den früher erwähnten Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix in Erinnerung. Hier wurde eine  $n \times n$  Matrix  $A$  (falls sie invertierbar ist) durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix übergeführt. Dieselben Operationen wurden auf der rechts stehenden Einheitsmatrix durchgeführt.

In anderen Worten:  $B_k \dots B_1 A = E_n$  für geeignete Elementarmatrizen  $B_1, B_2, \dots, B_k$  .

Auf der rechten Seite stand am Ende  $B_k \dots B_1 E_n = B_k \dots B_1$  .

Dies bedeutet, dass  $B_k \dots B_1 = A^{-1}$  .

**Eine Anwendung.** Sei  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$  und  $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  die

lineare Abbildung mit  $L(A)(x) = Ax$ .

Durch Wahl geeigneter Basen hat  $L(A)$  eine darstellende Matrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also gibt es Transformationsmatrizen  $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$  und  $T \in M(n \times n; \mathbb{K})$  sodass  $B = SAT^{-1}$ .

Wie können nun  $S$  und  $T^{-1}$  bestimmt werden?

**Schritt 1 :**

$$\begin{array}{cc} E_m & A \\ B_1 E_m & B_1 A \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ B_k \dots B_1 E_m & B_k \dots B_1 A \end{array}$$

Dabei ist  $B_k \dots B_1 A$  jene Matrix, die entsteht, wenn  $A$  in Zeilenstufenform übergeführt wird.

**Schritt 2 :**  $B_k \dots B_1 A$  kann nun durch elementare Spaltenumformungen

auf die Form  $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  gebracht werden.

Dies entspricht der Multiplikation von rechts mit geeigneten  $n$ -reihigen Elementarmatrizen.

$$\begin{array}{ccc} B_k \dots B_1 E_m & B_k \dots B_1 A & E_n \\ & B_k \dots B_1 A C_1 & E_n C_1 \\ & \dots & \\ & \dots & \\ & B_k \dots B_1 A C_1 \dots C_l & E_n C_1 \dots C_l \end{array}$$

Nun ist  $B_k \dots B_1 A C_1 \dots C_l = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und damit

$$S = B_k \dots B_1 \quad \text{und} \quad T^{-1} = C_1 \dots C_l .$$