

Übungsblatt 02 - Lineare Algebra - WS 2012/13

(Glowatschnig, Walzl, Gomez-Rocha, Hopfer, Windisch)

1. Man zeige, dass die 6 Lösungen der Gleichung $x^6 = 1$ mit der Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe bilden. Man stelle dazu auch die Verknüpfungstafel auf.

2. Definition: Sei (G, \circ) eine Gruppe. Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq G$ heißt Untergruppe von (G, \circ) wenn $\forall x, y \in U$ gilt, dass $x \circ y \in U$ und $x^{-1} \in U$.

Sei nun (G, \circ) eine Gruppe und U eine Untergruppe von (G, \circ) . Man betrachte die folgende Relation auf G : $x \sim y$ genau dann wenn $x^{-1} \circ y \in U$. Man beweise, dass das neutrale Element e von G in U liegt und dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

3. Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ die Menge der reellen 2×2 Matrizen mit den folgenden Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + c_2 d_1 & b_2 c_1 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Es sei (bereits) bekannt, dass $(M, +, \cdot)$ ein Ring ist.

Man zeige, dass $(M, +, \cdot)$ **kein** kommutativer Ring ist. Man weise weiters nach, dass es ein Einselement gibt. Wie sieht es aus?

4. Man untersuche, ob die folgenden Teilmengen des Vektorraums \mathbb{R}^3 (mit den üblichen Operationen) Untervektorräume sind:

(a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$

(b) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1 + x_1 - x_2\}$

(c) $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \cdot x_2 \geq 0\}$

5. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^3 . Man zeige, dass

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von v_1 und v_2 ist,

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **keine** Linearkombination von v_1 und v_2 ist.

6. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{2x}$. Man zeige, dass f und g im Vektorraum $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R} linear unabhängig sind.

7. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^4 linear unabhängig sind.