Übungsblatt 03 - Lineare Algebra - WS 2012/13
(Glowatschnig, Waltl, Gomez-Rocha, Hopfer, Windisch)

1. Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektoräume, und $U = V \times W = \{u = (v, w) \ : \ v \in V \ , \ w \in W\}$. Man zeige, dass U mit den folgenden Operationen wieder ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist,

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \quad , \quad \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$$

2. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 2, -1)$ des $\mathbb{R}^3$. Kann der Vektor $w = (2, 2, 1)$ im Sinne des Austauschlemmas gegen den Vektor v_2 ausgetauscht werden?

3. Man beschreibe $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ mit $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$. Überprüfe dann, ob die Vektoren $w_1 = (5, 3, 2)$ bzw. $w_2 = (0, 1, 2)$ in $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ liegen.

4. Betrachte folgende Vektoren im $\mathbb{C}^3$: $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (i, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1 + i)$.
Sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig? Was ist $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$?

5. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum einer Dimension ≥ 4 , und seien $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V$ linear unabhängig. Des weiteren sei $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$ und $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2)$, wobei

$$u_1 = a_1 + a_2 \ , \ u_2 = a_1 + a_3 \ , \ u_3 = a_3 - a_1 \quad \text{und} \quad w_1 = a_1 + 2a_2 \ , \ w_2 = a_3 + a_4$$

Ist die Summe $U + W$ eine direkte Summe?

6. Kann die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ geschrieben werden?

7. Seien $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $v_1 = (a, b, 0)$, $v_2 = (0, a, b)$, $v_3 = (b, 0, a) \in \mathbb{R}^3$. Unter welcher Bedingung für a, b ist v_3 eine Linearkombination von v_1, v_2 wodurch $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ die Dimension 2 erhält?