

**Übungsblatt 04 - Lineare Algebra - WS 2012/13**  
(Glowatschnig, Waltl, Gomez-Rocha, Hopfer, Windisch)

1. Durch Überführung in Zeilenstufenform bestimme man eine Basis des Zeilenraumes und den Zeilenrang folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 1 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Seien  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum  $V$ , und sei weiters  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . Man zeige:

Ist  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 1$ , dann sind die Vektoren  $v_1 - v, v_2 - v, \dots, v_n - v$  linear unabhängig.

3. Gegeben seien die Vektoren  $v_1 = (2, 0, 1, 3)$ ,  $v_2 = (0, 1, 2, 3)$ ,  $v_3 = (1, -1, 0, 0)$ ,  $v_4 = (0, -2, 1, 0)$  und  $v_5 = (1, 1, 1, 1)$  des  $\mathbb{R}^4$ . Man bestimme eine Basis von  $\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ .

4. Unter Verwendung der Zeilenstufenform untersuche man, ob die Vektoren  $v_1 = (i, -1, 2i)$ ,  $v_2 = (1, i, 0)$ ,  $v_3 = (1 + i, i, 2)$  des  $\mathbb{C}^3$  linear unabhängig sind.

5. Sei  $X$  eine beliebige Menge,  $V = \text{Abb}(X, \mathbb{R})$  und  $\varphi : X \rightarrow X$  eine beliebige Abbildung.

Man zeige, dass  $F : V \rightarrow V$  mit  $F(f) = f \circ \varphi$  linear ist.

6. Sei  $A = \begin{pmatrix} -3 & i \\ 5 & -4 \\ 2i & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ . Wie lautet die durch  $A$  definierte Abbildung  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ ? Man bestimme  $F(i, i)$ .

7. Für die lineare Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gelte  $F(1, 1, 1) = 3$ ,  $F(0, 1, -2) = 1$ ,  $F(0, 0, 1) = -2$ . Man bestimme  $F(x_1, x_2, x_3)$ .