Übungsblatt 06 - Lineare Algebra - WS 2012/13

(Glowatschnig, Waltl, Gomez-Rocha, Hopfer, Windisch)

1. Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$ eine idempotente Matrix, d.h. $A^2 = AA = A$, und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die zugehörige lineare Abbildung mit $F(x) = Ax$. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei die identische Abbildung.

Man beweise dass $\mathrm{Ker}F = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - F)$ und $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}F \oplus \mathrm{Im}F$.

2. $\mathcal{B} = (1+t+t^2, 1+t, 1)$ ist eine Basis des $\mathbb{P}_2$. Man bestimme den Koordinatenvektor von $v = a+bt+ct^2$ bzgl. $\mathcal{B}$.

3. $V = \{A \in M(2 \times 2; \mathbb{R}) \ : \ A = {}^tA\}$ ist ein Untervektorraum von $M(2 \times 2; \mathbb{R})$ der Dimension 3 .

Man bestimme den Koordinatenvektor von $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix} \in V$ bzgl. der Basis
$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Gegeben seien der Vektorraum V mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und der Vektorraum W mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Wie lautet die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ definierte lineare Abbildung $F : V \to W$?

Man bestimme $F(v_1 - v_2 + 2v_3)$ und $\mathrm{Ker}F$.

Ist F injektiv bzw. surjektiv?

5. Gegeben seien der Vektorraum V mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und der Vektorraum W mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$. Die lineare Abbildung $F : V \to W$ sei gegeben durch
$F(v_1) = w_2 + 2w_3$, $F(v_2) = 3w_1 + 4w_2 + 5w_3$, $F(v_3) = 6w_1 + 7w_2 + 8w_3$.

Man bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ und untersuche, ob F surjektiv bzw. injektiv ist. Des weiteren bestimme man $\mathrm{Ker}F$ und $\mathrm{Im}F$.

6. Sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y, z) = (3x + 2y - 4z \ , \ x - 5y + 3z)$.

Man bestimme $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ für $\mathcal{A} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ und $\mathcal{B} = ((1, 3), (2, 5))$.

Zeigen Sie, dass der Spaltenrang von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ gleich 2 ist, und dass damit F surjektiv ist.