

Übungsblatt 07 - Lineare Algebra - WS 2012/13
(Glowatschnig, Walzl, Gomez-Rocha, Hopfer, Windisch)

1. Man bestimme die Inverse folgender Matrizen mit dem in der Vorlesung angegebenen Algorithmus.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Addieren Sie das Doppelte der ersten Zeile von A zur dritten Zeile. Welche Matrix ergibt sich? Vertauschen Sie die zweite und dritte Spalte von A , welche Matrix ergibt sich?

Stellen Sie nun diese Umformungen durch geeignete Multiplikation von A mittels Elementarmatrizen dar.

3. Man bestimme den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ mit

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Besitzt das Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

eine nichttriviale Lösung? Falls ja, bestimme man diese.

5. Untersuchen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ auf Lösbarkeit, und bestimmen Sie, falls möglich, die allgemeine Lösung.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. Man bestimme jene $a \in \mathbb{R}$, für welche das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + (a^2 - 10)x_3 = a$$

(i) keine Lösung, (ii) eine eindeutig bestimmte Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

7. Man bestimme jene $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das Gleichungssystem

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-2\alpha x_1 + \alpha x_2 + 9x_3 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 = 1$$

(i) keine Lösung, (ii) eine eindeutig bestimmte Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen besitzt.

Bestimmen Sie konkret die Lösung für $\alpha = 1$.