

00. Einiges zum Vektorraum \mathbb{R}^n

In diesem einleitenden Kapitel werden die in der LV "Einführung in die mathematischen Methoden" erwähnten Konzepte über Vektoren (im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3) im Rahmen des n -dimensionalen Raumes \mathbb{R}^n diskutiert. Dies erfordert z.T. eine etwas abstraktere Betrachtungsweise und ist damit eine gute Überleitung zur Diskussion allgemeiner Vektorräume.

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bilden wir die Menge \mathbb{R}^n der **geordneten** n -Tupel reeller Zahlen

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

Dabei heißen zwei derartige n -Tupel (x_1, x_2, \dots, x_n) und (y_1, y_2, \dots, y_n) **gleich**, wenn

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$$

Im Falle $n = 1$ erhalten wir nichts anderes als die Menge $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, die wir uns geometrisch als Gerade mit einem Nullpunkt und einem Maßstab vorstellen können (reelle Zahlengerade).

Den Fall $n = 2$, also den \mathbb{R}^2 , können wir als Ebene veranschaulichen, wo jeder Punkt durch ein Zahlenpaar repräsentiert ist. Dies ermöglicht es u.a., geometrische Sachverhalte mittels analytischer Methoden zu untersuchen (analytische Geometrie).

Der \mathbb{R}^3 kommt bei der Untersuchung des dreidimensionalen Raumes zum Tragen. Durch Festlegen eines Koordinatensystems kann jeder Punkt des Raumes durch 3 Zahlen beschrieben werden.

Für $n > 3$ gibt es für den \mathbb{R}^n zwar keine einleuchtende geometrische Interpretation mehr, er ist nichtsdestoweniger für die Beschreibung verschiedenster Sachverhalte unabdingbar. Beispielsweise sind die Lösungen eines linearen homogenen Gleichungssystems von n Gleichungen in n Unbekannten als Vektoren des \mathbb{R}^n beschreibbar.

Im \mathbb{R}^n sind nun 2 zentrale Operationen definiert, i.e. wir können 2 Elemente des \mathbb{R}^n in geeigneter Weise "addieren", und wir können ein Element des \mathbb{R}^n in geeigneter Weise mit einem Skalar (in diesem Fall mit einer reellen Zahl) "multiplizieren".

Seien $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $w = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

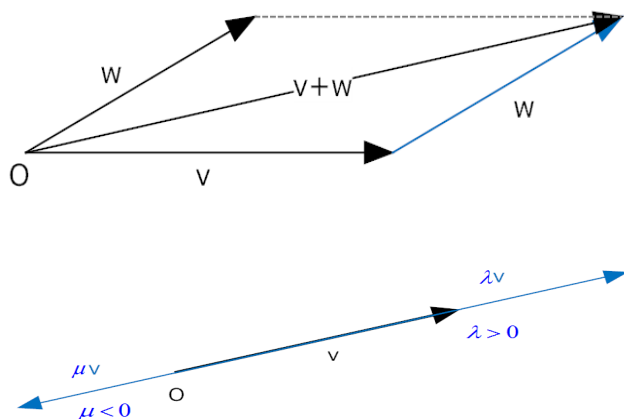
$$v + w = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(**Addition** von zwei Vektoren)

$$\lambda \cdot v = \lambda v = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

(**Multiplikation** eines Vektors mit einem **Skalar**)

Beachten wir die beiden geometrischen Interpretationsmöglichkeiten von Zahlentupel (als Koordinaten von Punkten bzw. "Pfeile"), dann können wir diese Operationen folgendermaßen veranschaulichen.



Aus den oben definierten Operationen lassen sich unmittelbar folgende Rechenregeln ableiten.

Seien $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (a) $v + w = w + v$ (Kommutativität)
- (b) $(v + w) + u = v + (w + u)$ (Assoziativität)
- (c) Der **Nullvektor** $0 = (0, 0, \dots, 0)$ hat die Eigenschaft, dass $v + 0 = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

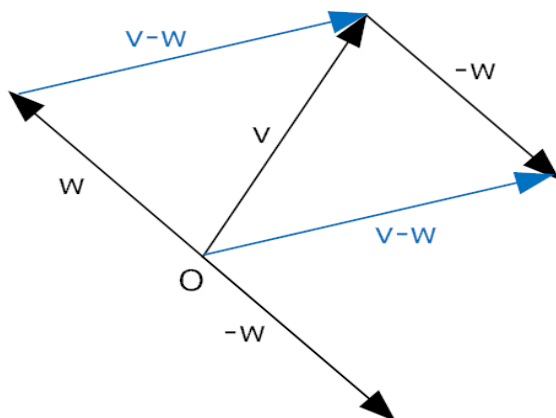
(d) Zu v hat der Vektor $-v = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ die Eigenschaft, dass $v + (-v) = 0$ gilt.

(e) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$, $1 \cdot v = 1v = v$

Bemerkungen. Die jeweilige Bedeutung der Symbole ”+” und ”0” sollte aus dem Zusammenhang hervorgehen und keine Verwirrung stiften.

Der Vektor $v + (-w)$ wird zumeist in der Form $v - w$ geschrieben und heißt **Differenzvektor** bzw. die **Differenz** von v und w .



Folgende weitere Bezeichnungen haben sich als sinnvoll erwiesen.

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

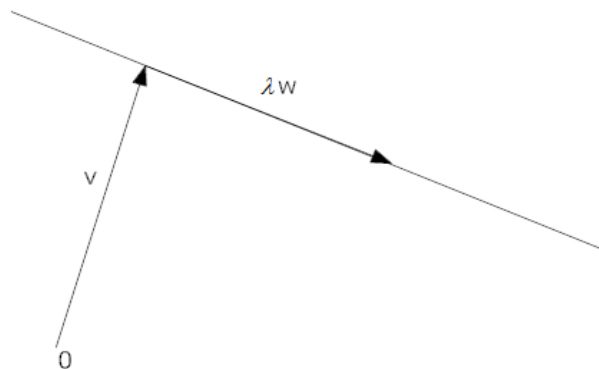
$$A + B = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists w \in A, \exists u \in B \text{ mit } v = w + u\}$$

$$\lambda A = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists w \in A \text{ mit } v = \lambda w\}$$

$A + B$ ist also die Menge aller Elemente des \mathbb{R}^n , die sich als Summe eines Elementes aus A und eines Elementes aus B darstellen lassen. Im Falle $A = \{w\}$ schreibt man auch $w + B$.

Definition. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Gerade** (im \mathbb{R}^n), wenn es zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $w \neq 0$ gibt, sodass

$$A = v + \mathbb{R}w = \{v + \lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$$



v stellt offenbar den Ortsvektor eines Punktes der Geraden dar und w die Richtung der Geraden. (**Richtungsvektor**).

Obige Darstellung heißt auch **Parameterdarstellung** (mit Parameter λ).

Für eine gegebene Gerade sind die Vektoren v und w natürlich **nicht** eindeutig bestimmt.

Gilt etwa $A = v + \mathbb{R}w$ und setzen wir etwa $v' = v + w$ und $w' = 2w$, dann gilt $A = v' + \mathbb{R}w'$.

Beweis. Setzen wir $A' = v' + \mathbb{R}w'$, dann ist zu zeigen dass $A = A'$.

Sei $u \in A$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $u = v + \lambda w$.

$u = v + \lambda w = v + w + (\lambda - 1)w = v + w + \frac{\lambda-1}{2} \cdot 2w = v' + \mu w'$ wobei $\mu = \frac{\lambda-1}{2}$. Also ist $u \in A'$.

Ist umgekehrt $u \in A'$, dann $\exists \mu \in \mathbb{R}$ mit $u = v' + \mu w'$.

$u = v' + \mu w' = v + w + 2\mu w = v + (2\mu + 1)w = v + \lambda w$ wobei

$\lambda = 2\mu + 1$. Also ist $u \in A$ und insgesamt $A = A'$. \square

Gilt umgekehrt für eine Gerade $A = v + \mathbb{R}w = v' + \mathbb{R}w'$, dann sind $v', v' + w' \in A$.

$v' = v + \lambda_1 w$, $v' + w' = v + \lambda_2 w$.

Folglich ist $v' - v = \lambda_1 w$ ein Richtungsvektor und

$w' = (v' + w') - v' = (\lambda_2 - \lambda_1)w = \lambda w$.

Bemerkung. Zu $v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt es **genau eine** Gerade, welche durch v_1 und v_2 geht.

Beweis. Eine derartige Gerade existiert, wenn man $v = v_1$, $w = v_2 - v_1$ und $A = v + \mathbb{R}w$ setzt. Der Nachweis, dass die Gerade eindeutig bestimmt ist, sei dem Leser überlassen. \square

Bemerkung. Im \mathbb{R}^2 kann eine Gerade in der parameterfreien Form $ax + by = c$ dargestellt werden. (siehe früher)

Eine wichtige Eigenschaft des \mathbb{R}^n ist, dass ein Skalarprodukt definiert werden kann, wo zwei Vektoren ein Skalar (also eine Zahl) zugeordnet wird.

Seien $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

das **Skalarprodukt** von v und w .

Durch einfaches Ausrechnen ergeben sich die Eigenschaften

- $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$, $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$
- $\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$, $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$
- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- $\langle v, v \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Mit Hilfe des Skalarproduktes kann nun wiederum die **Länge** bzw. die **Norm** bzw. der **Betrag** eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ definiert werden, nämlich mittels

$$\|v\| = |v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Also gilt $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$. Weiters gilt offenbar dass $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ und $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, also insbesondere $\|-v\| = \|v\|$.

Vektoren mit Norm (bzw. Länge) 1 heißen **Einheitsvektoren**.

Der einfache Beweis der folgenden Aussagen sei dem Leser überlassen.

$$(i) \quad \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle$$

(Satz von **Pythagoras**)

$$(ii) \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

(**Parallelogrammgleichung**)

Von zentraler Bedeutung ist

Satz. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

Beweis. Für $w = 0$ sind beide Seiten gleich Null, also ist die Ungleichung erfüllt. Sei also im folgenden $w \neq 0$.

Wir setzen $\lambda = \langle w, w \rangle$ und $\mu = -\langle v, w \rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle + 2\lambda\mu \langle v, w \rangle + \mu^2 \langle w, w \rangle = \\ &= \lambda \cdot (\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - 2\langle v, w \rangle^2 + \langle v, w \rangle^2) = \lambda \cdot (\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2) \end{aligned}$$

Wegen $\lambda > 0$ ist dann $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$. Wurzelziehen ergibt schließlich die Behauptung. \square

Bemerkung. Für $w \neq 0$ gilt $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ genau dann, wenn $\exists \rho \in \mathbb{R}$ mit $v = \rho w$.

Folgerung. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (**Dreiecksungleichung**)

$$\begin{aligned} \text{Beweis.} \quad \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \leq \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt die Behauptung. \square

Mittels der Norm kann in einem nächsten Schritt der **Abstand** zwischen zwei Vektoren definiert werden, nämlich mittels

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Für $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n)$ gilt also

$$d(v, w) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Aus den Eigenschaften der Norm folgt dann unmittelbar

$$d(v, w) \geq 0 \quad , \quad d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w \quad , \quad d(v, w) = d(w, v)$$

$$d(v_1, v_3) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Das Vorhandensein eines Skalarproduktes in einem Vektorraum ermöglicht es, den Winkel zwischen zwei Vektoren zu definieren, und in weiterer Folge davon zu sprechen, dass zwei Vektoren orthogonal (senkrecht) aufeinander stehen.

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt, falls $v, w \neq 0$, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1 \quad .$$

Wir setzen $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ und bezeichnen θ als den **Winkel** zwischen v und w . Er ist durch die Zusatzforderung $\theta \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Diese Definition ist so beschaffen, dass sie im \mathbb{R}^2 mit der üblichen Definition des Winkels übereinstimmt.

Bemerkung. Man kann nun auch den Winkel zwischen zwei Geraden des \mathbb{R}^n , welche einen gemeinsamen Punkt haben, definieren. Dies soll der Winkel zwischen den Richtungsvektoren sein. Allerdings werden hier genau genommen zwei Winkel geliefert, deren Summe jedoch π ist.

Eindeutigkeit kann man erzielen, wenn man für die Richtungsvektoren $\langle v, w \rangle \geq 0$ fordert, wodurch der Winkel im Bereich $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist.

Definition. Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal**, $v \perp w$, wenn $\langle v, w \rangle = 0$.

Der Nullvektor ist offenbar zu jedem Vektor orthogonal. Sind $v, w \neq 0$ orthogonal, dann ist der Winkel zwischen v und w gleich $\frac{\pi}{2}$.

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade, so heißt $s \in \mathbb{R}^n$ **orthogonal** zu A (oder

Normalenvektor von A), wenn $\forall v_1, v_2 \in A$ gilt

$$\langle s, v_1 - v_2 \rangle = 0 \quad \text{i.e.} \quad s \perp (v_1 - v_2)$$

Dies bedeutet, dass s orthogonal auf jeden Richtungsvektor der Geraden steht.

Bemerkung. Ist $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ eine Gerade im \mathbb{R}^2 , dann ist $s = (a, b)$ orthogonal zu A .

Beweis. Seien $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \in A$. Dann ist

$$\langle s, v_1 - v_2 \rangle = \langle s, v_1 \rangle - \langle s, v_2 \rangle = (ax_1 + by_1) - (ax_2 + by_2) = c - c = 0 \quad \square$$

Mit Hilfe zu einer Geraden orthogonaler Vektoren kann auch der **kürzeste Abstand eines Punktes von einer Geraden** bestimmt werden.

Ohne Beweis sei erwähnt: Sind v, v_1 verschiedene Punkte einer Geraden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und ist $u \in \mathbb{R}^n$, dann ist mit $w = v_1 - v$ der kürzeste Abstand von u zu A gegeben durch

$$\left\| v - \frac{\langle v-u, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w - u \right\|$$

Speziell im \mathbb{R}^2 ergibt sich für die Gerade $ax + by = c$ und $u = (x_0, y_0)$ als kürzester Abstand

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Definition. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Ebene**, wenn es $v, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass w_1, w_2 linear unabhängig sind und

$$A = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2 = \{u \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } u = v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\}$$

Dabei heißen w_1, w_2 linear unabhängig, wenn weder $w_1 = \mu w_2$ noch $w_2 = \mu w_1$ gilt.

Obige Darstellung heißt eine **Parameterdarstellung** der Ebene.

Bemerkung. Eine Ebene ist also festgelegt durch einen Punkt und zwei linear unabhängige Richtungen. Wie schon im Falle einer Geraden kann

ein und dieselbe Ebene auch durch einen anderen Punkt sowie andere Richtungen bestimmt sein.

Bemerkung. Im \mathbb{R}^3 kann, wie früher erwähnt, durch Elimination der Parameter die parameterfreie Darstellung der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ gewonnen werden.

Dies bedeutet offenbar wiederum, dass die Ebene aus all jenen Punkten (x_1, x_2, x_3) besteht, deren Skalarprodukt mit dem festen Vektor (a, b, c) den konstanten Wert d hat.

Definition. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Ebene, so heißt $s \in \mathbb{R}^n$ **orthogonal** zu A (bzw. ein **Normalenvektor** von A), wenn $\forall v_1, v_2 \in A$ gilt

$$\langle s, v_1 - v_2 \rangle = 0 \quad \text{d.h.} \quad s \perp (v_1 - v_2)$$

Zur Übung beweise man folgende Aussagen:

(a) Ein Normalenvektor einer Ebene steht auf jeden Richtungsvektor der Ebene orthogonal.

(b) Gegeben sei die Ebene $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ im \mathbb{R}^3 . Dann ist $s = (a, b, c)$ ein Normalenvektor.

(c) Ist $A = v + \mathbb{R}w_1 + \mathbb{R}w_2$ eine Parameterdarstellung einer Ebene im \mathbb{R}^3 , dann ist $s = w_1 \times w_2$ ein Normalenvektor.

Bemerkung. Ist $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ eine Ebene im \mathbb{R}^3 und $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, dann berechnet sich der Abstand des Punktes u zur Ebene durch

$$\frac{|au_1 + bu_2 + cu_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Das **Vektorprodukt** im \mathbb{R}^3 wurde bereits an früherer Stelle definiert.

Zu $v = (x_1, x_2, x_3)$, $w = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$v \times w = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \in \mathbb{R}^3$$

Die wichtigsten Eigenschaften, welche sich durch elementares Ausrechnen

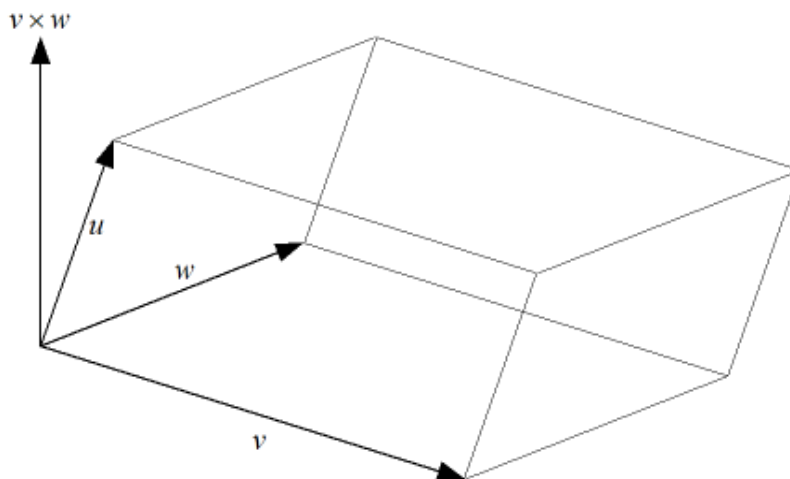
ergeben, seien hier nochmals angeführt.

- $(v + u) \times w = v \times w + u \times w$
 $v \times (w + u) = v \times w + v \times u$
 $(\lambda v) \times w = \lambda(v \times w) = v \times (\lambda w)$
- $\langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, w \rangle = 0$
- $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$ und folglich
 $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin \theta$, $\theta \dots$ Winkel zwischen v und w
- $v \times w = -(w \times v)$ und folglich $v \times v = 0$

Definition. Das **Spatprodukt** von drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ist die Zahl $\langle u, v \times w \rangle$.

Geometrisch ist der Betrag des Spatproduktes das Volumen des von den Vektoren v, w, u aufgespannten Spates

$$S = \{\lambda u + \mu v + \nu w : 0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1\}$$



Die Berechnung des Spatproduktes ist einfach mit Hilfe der Determinantenrechnung, weil

$$\langle u, v \times w \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$