Lineare Abhängigkeit

In den meisten Fällen werden wir es mit einer endlichen Familie von Vektoren zu tun haben. Manchmal ist es aber auch erforderlich, eine **beliebig große** Familie von Vektoren zu betrachten. Dafür brauchen wir eine geeignete Notation.

Es sei X eine Menge. Eine **Familie von Elementen von** X ist eine Abbildung $I \to X$, $i \mapsto x_i$.

I heißt dabei **Indexmenge** . Man verwendet dabei oft die Schreibweise $(x_i)_{i\in I}$ oder (x_i) .

Man beachte dabei, dass für $i \neq j$ auch $x_i = x_j$ sein kann.

Ist $J \subseteq I$, dann heißt $(x_i)_{i\in J}$ eine **Teilfamilie** von (x_i) .

Für $I = \emptyset$ heißt die Familie **leer**.

Ist I eine n-elementige Menge, etwa $I = \{1, 2, ..., n\}$, dann entspricht einer Familie $I \to X$ genau ein (geordnetes) n-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ von Elementen von X .

Ist $I = \mathbb{N}$, so erhält man eine **Folge** von Elementen von X .

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eine Familie von Vektoren aus V .

$v \in V$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $(v_1, v_2, ..., v_r)$, wenn

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ sodass $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_r v_r$.

(Man sagt auch kurz: v ist Linearkombination der $v_1, v_2, ..., v_r$)

Bemerkung. Ist $W \lhd V$ und $v_1, v_2, ..., v_r \in W$, dann liegt jede Linearkombination der $v_1, v_2, ..., v_r$ wieder in W .

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 0, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 0)$.

Dann ist etwa $v = (2, 8, 0)$ eine Linearkombination von v_1, v_2 , weil $v = 2v_1 + 8v_2$.

Hingegen ist $(0, 0, 3)$ **keine** Linearkombination von v_1, v_2 .

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V .

Wir betrachten alle Vektoren $v \in V$, die sich als Linearkombination von **endlich vielen** Vektoren aus $(v_i)_{i\in I}$ darstellen lassen, und fassen diese Vektoren in der Teilmenge $\mathrm{Span}(v_i)_{i\in I}$ zusammen.

$\mathrm{Span}(v_i)_{i\in I}$ heißt der von $(v_i)_{i\in I}$ **aufgespannte Raum** .

Somit gilt : $v \in \mathrm{Span}(v_i)_{i\in I} \;\Leftrightarrow\; \exists\, v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_r}$ aus $(v_i)_{i\in I}$, $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit $v = \lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + ..., \lambda_r v_{i_r}$.

Im besonderen ist $v_j \in \mathrm{Span}(v_i)_{i\in I}$ für jedes $j \in I$.

Bemerkungen.

- Ist $I = \emptyset$, dann ist per definition $\mathrm{Span}(v_i)_{i\in I} = \{0\}$.
- Ist I endlich, etwa $I = \{1, 2, ..., r\}$, dann gilt offenbar

$\mathrm{Span}(v_1, v_2, ..., v_r) = \mathbb{K}v_1 + \mathbb{K}v_2 + ... + \mathbb{K}v_r =$

$= \{v \in V \;:\; \exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K} \;\text{ mit }\; v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_r v_r\}$

Beispiel. Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Seien $f, g, h \in V$ wobei $f(t) = t^3$, $g(t) = e^t$ und $h(t) = \cos\, t$.

$\mathrm{Span}(f, g, h)$ besteht dann aus allen Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $t \to \lambda_1 t^3 + \lambda_2 e^t + \lambda_3 \cos\, t$.

So liegt etwa $-5t^3 + 3e^t + 2\cos\, t$ in $\mathrm{Span}(f, g, h)$.

Satz. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V .

Dann ist $\text{Span}(v_i)_{i\in I}$ der **kleinste** Untervektorraum von V , der alle v_i enthält.

Beweis. Wie schon zuvor erwähnt, liegen alle v_j in $\text{Span}(v_i)$.

(i) $\text{Span}(v_i) \lhd V$

Seien $v, w \in \text{Span}(v_i)$. Dann gibt es **endliche** Teilmengen $J_1, J_2 \subseteq I$ sodass v Linearkombination der Vektoren $(v_i)_{i\in J_1}$ ist, und w Linearkombination der Vektoren $(v_i)_{i\in J_2}$ ist. Damit ist aber $v+w$ Linearkombination der Vektoren $(v_i)_{i\in J_1\cup J_2}$, also $v+w \in \text{Span}(v_i)$.

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist in analoger Weise $\lambda v \in \text{Span}(v_i)$.

(ii) Sei $W \lhd V$ mit $v_i \in W$ für alle $i \in I$. Wie schon zuvor vermerkt, liegt dann auch jede endliche Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$ in W . Dies heißt aber, dass $\text{Span}(v_i) \subseteq W$ und somit ist $\text{Span}(v_i)_{i\in I}$ der kleinste Untervektorraum von V , der alle v_i enthält. $\square$

Bemerkung. $\text{Span}(v_i)_{i\in I}$ ist also der von den Vektoren (v_i) erzeugte Untervektorraum.

Sind $U, W \lhd V$, dann gilt: $U + W = \text{Span}(U \cup W)$.

(Beweis: Übung)

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1) Eine endliche Familie $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ heißt **linear unabhängig**, wenn gilt

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 0 \ , \ \ldots , \ \lambda_r = 0$$

(D.h. der Nullvektor kann mittels $(v_1, v_2, ...v_r)$ **nur** als triviale Linearkombination dargestellt werden.)

2) Eine (beliebige) Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

3) Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ heißt **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig ist.

(Dies wiederum heißt: es gibt eine endliche Teilfamilie $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r})$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ und $\lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + \ldots + \lambda_r v_{i_r} = 0$.

Anders gesagt: der Nullvektor kann als nichttriviale Linearkombination dargestellt werden.)

Anmerkung. (i) Bei endlichen Familien sagt man meist: die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_r$ sind linear unabhängig (bzw. linear abhängig) statt: die Familie $(v_1, v_2, ..., v_r)$ ist linear unabhängig (bzw. linear abhängig).

(ii) Die leere Familie ($I = \emptyset$), welche $\{0\}$ aufspannt, wird per definition als linear unabhängig festgesetzt.

Beispiele. Sei $V = \mathbb{R}^3$.

1) Betrachte $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 6, -3)$, $v_3 = (3, 9, 3)$.

v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig, weil $3v_1 + (-1)v_2 + 0 \cdot v_3 = 3v_1 - v_2 = 0$.

Bzw. $v_2 = 3v_1$.

2) Betrachte $v_1 = (3, 0, 0)$, $v_2 = (4, 1, 0)$, $v_3 = (2, 5, 2)$.

Wir zeigen, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

Sei $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, d.h.

$(3\lambda_1, 0, 0) + (4\lambda_2, \lambda_2, 0) + (2\lambda_3, 5\lambda_3, 2\lambda_3) = (3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_2 + 5\lambda_3, 2\lambda_3) = (0, 0, 0)$.

Somit $3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$, $2\lambda_3 = 0$ und damit $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$.

Weitere Beobachtungen. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1) Jede Teilfamilie einer linear unabhängigen Familie ist wieder linear unabhängig (und damit ist jede Oberfamilie einer linear abhängigen Familie wieder linear abhängig).

2) Zu $(v_i)_{i \in I}$ sei $v_{i_0} = 0$, $i_0 \in I$. Dann ist $(v_i)_{i \in I}$ wegen $1 \cdot v_{i_0} = 0$

linear abhängig.

3) Zu $(v_i)_{i\in I}$ sei $v_{i_0} = v_{i_1}$, $i_0, i_1 \in I$. Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ wegen $1 \cdot v_{i_0} + (-1) \cdot v_{i_1} = 0$ linear abhängig.

4) $v \in V$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $v \neq 0$.

5) Sei $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig in W und $W \lhd V$, dann ist $(v_i)_{i\in I}$ auch linear unabhängig in V .

6) Seien $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ linear abhängig, $r \geq 2$. Dann gibt es ein $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ sodaß v_k Linearkombination der restlichen Vektoren $(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_r)$ ist.

Beweis zu 6) :

$\exists\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$.

Sei etwa $\lambda_k \neq 0$. Dann ist

$$v_k = -\tfrac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \ldots - \tfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1} - \tfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} v_{k+1} - \ldots - \tfrac{\lambda_r}{\lambda_k} v_r \ .$$

Beispiele.

1) In $V = \mathbb{K}^n$ gibt es n linear unabhängige Vektoren.

Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i-teStelle}{1}, 0, \ldots 0)$.

Behauptung : die n Vektoren $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sind linear unabhängig.

Sei $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$. Wegen $\lambda_1 e_1 = (\lambda_1, 0, \ldots, 0)$, $\lambda_2 e_2 = (0, \lambda_2, 0, \ldots, 0)$, ... , $\lambda_n e_n = (0, \ldots, 0, \lambda_n)$ gilt offenbar

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, somit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

2) In $V = \mathbb{P}_n$ gibt es $n+1$ linear unabhängige Vektoren.

Für jedes $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ sei $p_i(t) = t^i$.

Behauptung : $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ sind linear unabhängig.

Sei $\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n = 0$ (Nullvektor in $\mathbb{P}_n$) .

D.h. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n = 0$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann ein Polynom n-ten Grades $(n \geq 1)$ aber höchstens n (reelle) Nullstellen haben. Damit muß, falls $n \geq 1$, $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ sein. Der Fall $n = 0$ ist trivial.

Zweite Überlegung : Wird $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n = 0$ n-mal differenziert, erhalten wir $n(n-1)\ldots 2.1\lambda_n = 0$ und damit $\lambda_n = 0$.

Damit verbleibt $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_{n-1} t^{n-1} = 0$, und $(n-1)$-faches Differenzieren liefert $\lambda_{n-1} = 0$ etc. Schließlich $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$.

Bemerkung. (Eine komfortable Schreibweise)

Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum V .

Dann kann ein Vektor $v \in \mathrm{Span}(v_i)$ formal geschrieben werden in der Form $v = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i$, wobei **höchstens endlich viele** $\lambda_i \neq 0$ sind.

Die Addition von $v = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i$ und $w = \sum\limits_{i \in I} \mu_i v_i$ ist in dieser Schreibweise dann $v + w = \sum\limits_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i$, und die Multiplikation von $v = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda v = \sum\limits_{i \in I} (\lambda \lambda_i) v_i$.

Lemma. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum V . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig ,

2) die Darstellung jedes Vektors $v \in \mathrm{Span}(v_i)$ in der Form $v = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i$ ist **eindeutig** .

Beweis.

1) $\Rightarrow$ 2) : Sei $v \in \mathrm{Span}(v_i)$ und $v = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum\limits_{i \in I} \mu_i v_i$.

Dann gibt es **endliche** Teilmengen $J_1, J_2 \subseteq I$ mit $\lambda_i = 0$ für $i \notin J_1$ und $\mu_i = 0$ für $i \notin J_2$.

Die Menge $J = J_1 \cup J_2$ ist ebenfalls endlich und für $i \notin J$ gilt offenbar $\lambda_i = 0$ und $\mu_i = 0$. Also kann v auch geschrieben werden als endliche Linearkombination der Form $v = \sum_{i \in J} \lambda_i v_i$ bzw. $v = \sum_{i \in J} \mu_i v_i$.

Subtraktion liefert $0 = \sum_{i \in J} (\lambda_i - \mu_i) v_i$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der (v_i) ist dann $\lambda_i - \mu_i = 0 \ \forall\, i \in J$, bzw. $\lambda_i = \mu_i \ \forall\, i \in J$. Somit ist $\lambda_i = \mu_i$ **für alle** $i \in I$.

2) $\Rightarrow$ 1) : Annahme: $(v_i)_{i \in I}$ sei linear abhängig.

Dann ist eine endliche Teilfamilie $(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_r})$ linear abhängig, und (siehe Beobachtungen vorher, 6)) einer der Vektoren, etwa v_{i_k} , ist darstellbar als Linearkombination der verbleibenden Vektoren. Dies ist eine weitere, unterschiedliche Darstellung als $1 \cdot v_{i_k}$ von v_{i_k} , was einen Widerspruch zur Annahme liefert.

Somit ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig. $\square$