

# Lineare Abbildungen - II

Eine lineare Abbildung  $F : V \rightarrow W$  wird auch als (Vektorraum-) **Homomorphismus** bezeichnet.

Die Menge aller Homomorphismen  $V \rightarrow W$  bezeichnen wir mit

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{F : V \rightarrow W : F \text{ ist linear}\} .$$

$F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  heißt

**Isomorphismus** , wenn  $F$  bijektiv ist,

**Monomorphismus** , wenn  $F$  injektiv ist,

**Epimorphismus** , wenn  $F$  surjektiv ist,

**Endomorphismus** , wenn  $V = W$  ,

**Automorphismus** , wenn  $V = W$  und  $F$  bijektiv ist.

## Bemerkungen.

1) (Die Komposition von linearen Abbildungen ist wieder linear)

Seien  $V, W, U$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $F : V \rightarrow W$  und  $G : W \rightarrow U$  lineare Abbildungen.

Dann ist auch die Komposition  $G \circ F : V \rightarrow U$  linear.

**Beweis.**  $(G \circ F)(\lambda v_1 + \mu v_2) = G(F(\lambda v_1 + \mu v_2)) = G(\lambda F(v_1) + \mu F(v_2)) = \lambda G(F(v_1)) + \mu G(F(v_2)) = \lambda(G \circ F)(v_1) + \mu(G \circ F)(v_2)$   $\square$

2) Sei  $F : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus. Dann ist die Umkehrabbildung  $F^{-1} : W \rightarrow V$  linear und damit ist  $F^{-1}$  ebenfalls ein Isomorphismus.

**Beweis.** Aufgabe.

3) Sei  $\text{Aut}(V)$  die Menge der Automorphismen von  $V$  .

Dann ist  $\text{Aut}(V)$  eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen.

**Beweis.** Aufgabe. (Man bestimme dabei das neutrale Element sowie das inverse Element zu einem  $F$  )

4) Es gilt:  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \triangleleft \text{Abb}(V, W)$  .

D.h. die Summe von zwei linearen Abbildungen ist wieder linear und das skalare Vielfache einer linearen Abbildung ist wieder linear.

**Beweis.** Seien  $F, G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  . Dann ist zu zeigen, dass  $F + G \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  und  $\lambda F \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  .

Setze  $H = F + G$  . Dann gilt  $H(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (F + G)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + G(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \lambda_1 G(v_1) + \lambda_2 G(v_2) = \lambda_1(F(v_1) + G(v_1)) + \lambda_2(F(v_2) + G(v_2)) = \lambda_1(F + G)(v_1) + \lambda_2(F + G)(v_2) = \lambda_1 H(v_1) + \lambda_2 H(v_2)$  .

$(\lambda F)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda \cdot F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda \cdot (\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2)) = \lambda \lambda_1 F(v_1) + \lambda \lambda_2 F(v_2) = \lambda_1(\lambda F)(v_1) + \lambda_2(\lambda F)(v_2)$  .  $\square$

5) Isomorphe Vektorräume sind bzgl. ihrer Struktur als Vektorräume gleich bzw. nicht unterscheidbar.

Ist  $F : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus, dann gilt etwa

- $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  linear unabhängig in  $V \Leftrightarrow (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k))$  linear unabhängig in  $W$
- $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  Basis in  $V \Leftrightarrow (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_k))$  Basis in  $W$

Mit jeder linearen Abbildung  $F : V \rightarrow W$  sind zwei wichtige Unterräume verbunden.

$\text{Ker}F = F^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : F(v) = 0\} \triangleleft V$  ... **Kern** von  $F$

$\text{Im}F = F(V) \triangleleft W$  ... **Bild** von  $F$

Offensichtlich gilt:  $F$  ist surjektiv  $\Leftrightarrow \text{Im}F = W$  .

**Beobachtung.**  $F$  ist injektiv  $\Leftrightarrow \text{Ker}F = \{0\}$  .

**Beweis.** "  $\Rightarrow$  " : Beachte, dass stets  $0 \in \text{Ker}F$  . Sei nun  $0 \neq v \in \text{Ker}F$  .

Wegen  $F(v) = F(0) = 0$  ergibt sich ein Widerspruch zur Injektivität.

" $\Leftarrow$ " : Sei  $F(v_1) = F(v_2)$ . Dann ist  $0 = F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2)$ , also  $v_1 - v_2 \in \text{Ker}F$  und damit  $v_1 - v_2 = 0$  bzw.  $v_1 = v_2$ .

### Beispiele.

1) Sei  $w \in \mathbb{R}^n$  fest und  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $F(\lambda) = \lambda w$ .

Für  $w = 0$  ist  $\text{Ker}F = \mathbb{R}$  und  $\text{Im}F = \{0\}$ . Für  $w \neq 0$  ist  $\text{Ker}F = \{0\}$  und  $\text{Im}F$  eine Gerade durch 0.

In beiden Fällen gilt  $\dim \text{Ker}F + \dim \text{Im}F = 1$  ( $= \dim \mathbb{R}$ ).

2) Seien  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig und  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $F(\lambda, \mu) = \lambda w_1 + \mu w_2$ .

Dann ist  $F$  linear,  $\text{Ker}F = \{0\}$  und  $\text{Im}F$  eine Ebene durch 0.

Es gilt  $\dim \text{Ker}F + \dim \text{Im}F = 2$  ( $= \dim \mathbb{R}^2$ ).

3) Sei  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  mit

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right).$$

Dann ist  $\text{Ker}F$  die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Eine wichtige Beziehung zwischen  $\text{Ker}F$  und  $\text{Im}F$  wird durch die Dimensionsformel ausgedrückt.

### Satz. (Dimensionsformel)

Sei  $F : V \rightarrow W$  linear und  $\dim V < \infty$ . Dann gilt

$$\dim V = \dim \text{Ker}F + \dim \text{Im}F$$

**Beweis.** Weil  $\dim \text{Im}F \leq \dim V < \infty$ , gibt es eine endliche Basis von  $\text{Im}F$ , etwa  $(w_1, w_2, \dots, w_r)$ . Nun wähle  $v_1, v_2, \dots, v_r \in V$  mit  $F(v_i) = w_i \quad \forall i$ . Dann ist  $(v_1, v_2, \dots, v_r)$  linear unabhängig in  $V$ .

Wähle eine Basis  $(u_1, u_2, \dots, u_k)$  von  $\text{Ker}F$ .

Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$  eine Basis von  $V$  ist.

Sei  $v \in V$ . Dann gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  sodass  $F(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r = F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r)$ .

Dann ist aber  $v - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \in \text{Ker}F$  und folglich gibt es  $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$  mit  $v - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k$ .

Damit ist  $v = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ . Dies bedeutet, dass  $\mathcal{B}$  ein Erzeugendensystem von  $V$  ist.

Sei nun  $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ . Dann ist

$$0 = F(0) = \mu_1 F(u_1) + \dots + \mu_k F(u_k) + \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_r F(v_r) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_r F(v_r) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r.$$

Weil  $(w_1, \dots, w_r)$  linear unabhängig ist, gilt  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ .

Somit  $\mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k = 0$  und weil  $(u_1, \dots, u_k)$  linear unabhängig ist, gilt  $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$ .

Damit ist  $\mathcal{B}$  auch linear unabhängig und somit eine Basis.

Aus  $\dim \text{Ker}F = k$ ,  $\dim \text{Im}F = r$  und  $\dim V = r + k$  folgt die Behauptung.  $\square$

### Bemerkung.

- $\dim \text{Ker}F$  heißt auch der **Defekt von  $F$** , in Zeichen  $\text{def}F$ .
- $\dim \text{Im}F$  heißt auch der **Rang von  $F$** , in Zeichen  $\text{Rg}F$ .