Rang einer linearen Abbildung

Zur Wiederholung:

Ist $F: V \to W$ eine lineare Abbildung, dann ist der **Rang von** F gleich

$$\mathrm{Rg}F = \dim\, \mathrm{Im}F \ .$$

Bemerkungen.

1) Stets gilt $\mathrm{Rg}F \leq \dim V$. $\mathrm{Rg}F$ kann auch "∞" sein (betrachte $\mathrm{id}_V : V \to V$ wobei $\dim V = \infty$) .

2) Ist $\dim V < \infty$, dann folgt aus der Dimensionsformel $(\dim V = \dim \mathrm{Ker}F + \dim \mathrm{Im}F)$ sofort

$$\mathrm{Rg}F = \dim V \ \Leftrightarrow \ F \text{ ist injektiv.}$$

3) Ist $F: V \to W$ ein Isomorphismus, dann gilt klarerweise $\mathrm{Rg}F = \dim V = \dim W$.

4) Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die durch A definierte lineare Abbildung, also $x \mapsto Ax$. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis in $\mathbb{K}^n$, dann wird $\mathrm{Im}L(A)$ wegen $A \cdot x = x_1 A e_1 + \ldots + x_n A e_n$ aufgespannt von den Vektoren $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$. Dies sind aber die Spalten von A .

Somit ist $\mathrm{Rg}L(A) =$ Spaltenrang von A .

Damit wiederum kann nun der **Rang einer Matrix** A definiert werden durch $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}L(A) =$ Spaltenrang von A .

Frage. Seien V, W endlichdimensional und $F: V \to W$ linear. Wie kann eine Basis von $\mathrm{Im}F$ (und damit auch der Rang von F) bestimmt werden ?

Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}$ eine Basis von W .

Setze $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.

Betrachte das kommutative Diagramm $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{K}^m \\ \Phi_\mathcal{A}\downarrow & & \downarrow\Phi_\mathcal{B} \\ V & \xrightarrow[F]{} & W \end{array}$

Weil $\Phi_\mathcal{A}$ und $\Phi_\mathcal{B}$ Isomorphismen sind, genügt es, eine Basis von $\mathrm{Im}L(A) \lhd \mathbb{K}^m$ zu bestimmen. Die Bildvektoren unter $\Phi_\mathcal{B}$ liefern dann die gesuchte Basis für $\mathrm{Im}F$.

Wie schon erwähnt, wird $\mathrm{Im}L(A)$ von den Spalten von A aufgespannt.

Damit: Bilde ${}^tA$ (dadurch werden die Spalten von A zu den Zeilen von ${}^tA$), und bringe ${}^tA$ auf Zeilenstufenform B . Die von der Nullzeile verschiedenen Zeilen von B bilden dann eine Basis von $\mathrm{Im}L(A)$.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $W = \mathbb{R}^5$. $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{B}$) sei die kanonische Basis in $\mathbb{R}^4$ (bzw. $\mathbb{R}^5$) .

$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_2 - x_3, -2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -x_1 - x_3 + 2x_4)$

Damit

$$M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} , \ {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Somit ist $\mathrm{Rg}F = \mathrm{Rg}B = 3$, und die Vektoren
$(0, 1, -2, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 2, -1)$, $(0, 0, 0, 0, \frac{5}{2})$ sind folglich eine Basis von $\mathrm{Im}L(A)$. Weil $W = \mathbb{R}^5$ und $\Phi_\mathcal{B} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^5}$ bilden diese Vektoren dann auch eine Basis von $\mathrm{Im}F$.

Die folgende wichtige Aussage ist charakteristisch für endlichdimensionale Vektorräume und eine Konsequenz der Dimensionsformel $(\dim V = \dim \mathrm{Ker}F + \dim \mathrm{Im}F)$.

Lemma. Sei $F : V \to W$ linear **und** $\dim V = \dim W < \infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) F ist injektiv,

ii) F ist surjektiv,

iii) F ist bijektiv.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii) : F injektiv $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}F = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Ker}F = 0$ $\Rightarrow$

$\dim W = \dim V = \dim \mathrm{Im}F$ $\Rightarrow$ $W = \mathrm{Im}F$, d.h. F ist surjektiv.

ii) $\Rightarrow$ iii) : zu zeigen ist, dass F injektiv ist. Laut Voraussetzung ist nun $W = \mathrm{Im}F$. Damit ist $\dim V = \dim W = \dim \mathrm{Im}F$, folglich ist $\dim \mathrm{Ker}F = 0$. Damit gilt $\mathrm{Ker}F = \{0\}$, also ist F injektiv.

iii) $\Rightarrow$ i) : trivial. $\square$

Folgerung. $F : V \to W$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $\dim V = \dim W$ und $\mathrm{Rg}F = \dim W$.

Definition. Eine quadratische Matrix $A \in M(n\times n;\mathbb{K})$ heißt **invertierbar** (oder **regulär**), wenn eine Matrix $A' \in M(n\times n;\mathbb{K})$ existiert, sodaß $AA' = A'A = E_n$.

Nichtinvertierbare Matrizen heißen **singulär**.

Bemerkung. Die Menge $\mathrm{GL}(n;\mathbb{K}) = \{A \in M(n \times n;\mathbb{K}) : A$ ist invertierbar$\}$ ist eine **Gruppe** bzgl. der Multiplikation von Matrizen ("**general linear group**").

A' ist damit eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet und heißt die **inverse Matrix** zu A .

Dabei gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Falls A invertierbar ist, ist auch ${}^tA$

invertierbar und es gilt $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ (weil ${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE_n = E_n$) .

Satz. Sei $F : V \to W$ linear und $\dim V = \dim W = n < \infty$. Weiters seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V bzw. W . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) F ist ein Isomorphismus,

2) $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ ist invertierbar.

Falls F ein Isomorphismus ist, gilt $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(F^{-1}) = (M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F))^{-1}$.

Beweis. Setze $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$.

1) $\Rightarrow$ 2) : Setze $A' = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(F^{-1})$. Aus vorherigen Ergebnissen folgt, dass

$$AA' = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(F^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F \circ F^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_W) = E_n \quad \text{und}$$

$$A'A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F^{-1} \circ F) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V) = E_n \ .$$

Dies heißt aber, dass A invertierbar ist und die Zusatzbehauptung erfüllt ist.

2) $\Rightarrow$ 1) : Setze $G = L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(A^{-1})$. Dann ist

$$F \circ G = L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) \circ L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(A^{-1}) = L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(AA^{-1}) = L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(E_n) = \mathrm{id}_W \quad \text{und}$$

$$G \circ F = L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(A^{-1}) \circ L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) = L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(A^{-1}A) = L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(E_n) = \mathrm{id}_V \ .$$

Dies heißt aber, dass F bijektiv ist und $F^{-1} = G$. $\square$