Basiswechsel und Koordinatentransformation

Durch Wahl einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V wird bekanntlich ein Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \to V$ definiert, wobei

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \in V$$

Zu $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \in V$ heißt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{A}$.

Ist nun $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ eine weitere Basis von V (mit Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to V$ bzw. $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \mapsto y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n$) , dann stellt sich die

Frage. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinatenvektoren bzgl. $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$?

Dazu betrachten wir

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "L(T)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "id_V"'] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[rr, "L(T)"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & & \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Die lineare Abbildung $L(T) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wird durch die Matrix $T = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ beschrieben.

Dieses Diagramm beschreibt die **Koordinatentransformation**, die Matrix T heißt **Transformationsmatrix** des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Offenbar gilt für ein $v \in V$, dass $y = Tx$, wobei x der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{A}$ ist und y der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$ ist.

Damit: Die j-te Spalte von T ist der Koordinatenvektor von v_j bzgl. $\mathcal{B}$.

Beispiel. Seien $\mathcal{A} = \{(1,0) \ , \ (1,1)\}$ sowie $\mathcal{B} = \{(-1,2) \ , \ (2,1)\}$ Basen des $\mathbb{R}^2$, also $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (1,1)$ und $w_1 = (-1,2)$, $w_2 = (2,1)$.

$(1,0) = \lambda(-1,2) + \mu(2,1)$ liefert $\lambda = -\frac{1}{5}$, $\mu = \frac{2}{5}$

$(1,1) = \lambda(-1,2) + \mu(2,1)$ liefert $\lambda = \frac{1}{5}$, $\mu = \frac{3}{5}$

Also ist $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Problemstellung. Die Basisvektoren von $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ seien gegeben als Linearkombination der Vektoren von $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$. Man bestimme die Transformationsmatrix von $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Betrachten wir die Transformationsmatrix S von $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$, dann ist die j-te Spalte von S der Koordinatenvektor von w_j bzgl. $\mathcal{A}$.

Folglich ist $T = S^{-1}$ die gesuchte Transformtionsmatrix von $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Damit stellt sich die Frage nach der Bestimmung der inversen Matrix S^{-1} von S .

Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix
(Beweis folgt später)

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$

1) Schreibe A und die Einheitsmatrix E_n nebeneinander und führe alle Operationen, die an der linken Matrix (zu Beginn A) vorgenommen werden, in gleicher Weise an der rechten Matrix (zu Beginn E_n) durch.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2) Durch Zeilenumformungen bringe A auf Zeilenstufenform.

Ist Zeilenrang $A < n$, dann ist A nicht invertierbar.

Ist Zeilenrang $A = n$, dann erzeuge durch Zeilenumformungen jeweils

"1" in den Elementen der Hauptdiagonale.

3) Durch weitere Zeilenumformungen erzeuge links E_n . Die Matrix auf der rechten Seite ist dann schließlich A^{-1} .

Beispiel. Siehe Tafel.