

Basiswechsel und Koordinatentransformation

Durch Wahl einer Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ in einem \mathbb{K} -Vektorraum V wird bekanntlich ein Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$ definiert, wobei

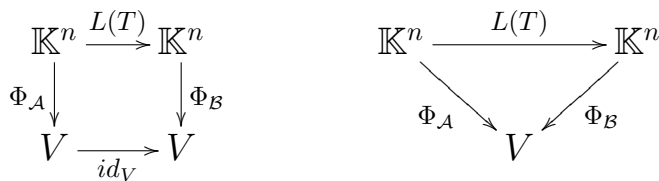
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$$

Zu $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$ heißt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. \mathcal{A} .

Ist nun $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ eine weitere Basis von V (mit Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$ bzw. $(y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$), dann stellt sich die

Frage. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinatenvektoren bzgl. \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} ?

Dazu betrachten wir



Die lineare Abbildung $L(T) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ wird durch die Matrix $T = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)$ beschrieben.

Dieses Diagramm beschreibt die **Koordinatentransformation**, die Matrix T heißt **Transformationsmatrix** des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Offenbar gilt für ein $v \in V$, dass $y = Tx$, wobei x der Koordinatenvektor von v bzgl. \mathcal{A} ist und y der Koordinatenvektor von v bzgl. \mathcal{B} ist.

Damit: Die j -te Spalte von T ist der Koordinatenvektor von v_j bzgl. \mathcal{B} .

Beispiel. Seien $\mathcal{A} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ sowie $\mathcal{B} = \{(-1, 2), (2, 1)\}$ Basen

des \mathbb{R}^2 , also $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$ und $w_1 = (-1, 2)$, $w_2 = (2, 1)$.

$$(1, 0) = \lambda(-1, 2) + \mu(2, 1) \text{ liefert } \lambda = -\frac{1}{5}, \mu = \frac{2}{5}$$

$$(1, 1) = \lambda(-1, 2) + \mu(2, 1) \text{ liefert } \lambda = \frac{1}{5}, \mu = \frac{3}{5}$$

$$\text{Also ist } T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Problemstellung. Die Basisvektoren von $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ seien gegeben als Linearkombination der Vektoren von $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$. Man bestimme die Transformationsmatrix von $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Betrachten wir die Transformationsmatrix S von $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$, dann ist die j -te Spalte von S der Koordinatenvektor von w_j bzgl. \mathcal{A} .

Folglich ist $T = S^{-1}$ die gesuchte Transformationsmatrix von $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Damit stellt sich die Frage nach der Bestimmung der inversen Matrix S^{-1} von S .

Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix

(Beweis folgt später)

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$

1) Schreibe A und die Einheitsmatrix E_n nebeneinander und führe alle Operationen, die an der linken Matrix (zu Beginn A) vorgenommen werden, in gleicher Weise an der rechten Matrix (zu Beginn E_n) durch.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2) Durch Zeilenumformungen bringe A auf Zeilenstufenform.

Ist Zeilenrang $A < n$, dann ist A nicht invertierbar.

Ist Zeilenrang $A = n$, dann erzeuge durch Zeilenumformungen jeweils

”1” in den Elementen der Hauptdiagonale.

3) Durch weitere Zeilenumformungen erzeuge links E_n . Die Matrix auf der rechten Seite ist dann schließlich A^{-1} .

Beispiel. Siehe Tafel.