Äquivalenz von Matrizen

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Aus dem Vorhergehenden ist es naheliegend, dass sich bei Wahl verschiedener Basen für V bzw. W auch verschiedene darstellende Matrizen für F ergeben werden.

Wir befassen uns jetzt mit der Fragestellung, ob man zu $F : V \to W$ geeignete Basen für V und W finden kann, sodass die darstellende Matrix von F "möglichst einfach" wird.

Seien also V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\dim V = n$, $\dim W = m$ und $F : V \to W$ linear.

Des weiteren seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ zwei Basen von V , und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ zwei Basen von W .

Wir setzen $A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$ und $B = M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(F)$, und fragen, in welcher Weise A und B zusammenhängen.

Dazu betrachten wir das (kommutative) Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "L(A)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\
V \arrow[r, "F"] & W \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "L(B)"] \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{A}'}"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{B}'}"']
\end{tikzcd}$$

mit den Bezeichnungsweisen

$$L(A) : \; x \mapsto y = Ax \quad , \quad L(B) : \; x' \mapsto y' = Bx'$$

$$(\Phi_{\mathcal{A}'})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : x \mapsto x' = Tx \quad , \quad (\Phi_{\mathcal{B}'})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} : y \mapsto y' = Sy$$

(T ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$, S ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$)

Also gilt $x' = Tx$, $y' = Sy$, $y = Ax$, $y' = Bx'$ und damit

$Sy = Bx' = B(Tx) = (BT)x$. Mit $y = Ax$ gilt dann

$(SA)x = (BT)x \quad \forall\, x \in \mathbb{K}^n$ und damit $SA = BT$. Folglich

Transformationsformel für darstellende Matrizen:

$$B = SAT^{-1} \ .$$

Nun beantworten wir die Frage, was die "einfachste Form" einer darstellenden Matrix ist.

Lemma. Sei $F : V \to W$ linear. Weiters gelte $\dim V = n$, $\dim W = m$ und $\mathrm{Rg}F = r$.

Dann existieren Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V bzw. W , sodass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Beweis. Sei $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\mathrm{Im}F$. Ergänze diese Basis zu einer Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m)$ von W .

Im Beweis der Dimensionsformel wurde gezeigt, dass es dann eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_k)$ von V gibt mit

$$u_1, \ldots, u_k \in \mathrm{Ker}F \quad , \quad F(v_i) = w_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, r \quad , \quad r + k = n \ .$$

Damit gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} . \qquad \square$$

Bemerkung. Ist $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$, dann hat die Abbildung $x \mapsto Ax$ offenbar die Form $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$, ist also, geometrisch gesehen, die Projektion von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auf die ersten r Koordinaten.

Bemerkung. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und $G : V' \to V$ und $H : W \to W'$ Isomorphismen.

Dann ist offenbar $\mathrm{Rg} F = \mathrm{Rg}(H \circ F \circ G)$.

Sei nun $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$, S eine invertierbare $m \times m$ Matrix und T eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Dann ist auch T^{-1} invertierbar.

Seien $L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L(S) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ und $L(T^{-1}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ die durch A , S bzw. T^{-1} definierten linearen Abbildungen.

Dann sind $L(S)$ und $L(T^{-1})$ Isomorphismen, und es gilt

$$L(S) \circ L(A) \circ L(T^{-1}) = L(SAT^{-1}) .$$

Mit der vorhergehenden Beobachtung ist damit

$$\mathrm{Rg} L(SAT^{-1}) = \mathrm{Rg} L(A) .$$

Dies heißt aber : Spaltenrang A = Spaltenrang (SAT^{-1}) .

Ebenso gilt : Zeilenrang A = Zeilenrang (SAT^{-1}) .

(Zeilenrang A = Spaltenrang ${}^tA$ = Spaltenrang $(({}^tT^{-1})({}^tA)({}^tS))$ =

Spaltenrang ${}^t(SAT^{-1})$ = Zeilenrang (SAT^{-1}) .)

Damit können wir nun zeigen, dass Spaltenrang und Zeilenrang für jede Matrix stets übereinstimmen.

Satz. Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$.

Dann gilt Zeilenrang A = Spaltenrang A .

Beweis.
Sei $L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die durch A definierte lineare Abbildung.

Dann ist A die darstellende Matrix von $L(A)$, wenn in $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$ die kanonischen Basen gewählt werden.

Durch Wahl geeigneter anderer Basen hat $L(A)$ eine darstellende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(siehe vorher)} .$$

Die Transformationsformel besagt, dass es invertierbare Matrizen S und T gibt mit $B = SAT^{-1}$.

Offensichtlich gilt Zeilenrang B = Spaltenrang $B = r$.

Damit ist auch Zeilenrang A = Spaltenrang $A = r$. $\square$

Ohne Beweis sei noch eine Aussage angeführt, welche Auskunft über den Rang des Produktes von zwei Matrizen gibt.

Ungleichung von Sylvester.
Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $B \in M(n \times r; \mathbb{K})$. Dann gilt

$$\mathrm{Rg}A + \mathrm{Rg}B - n \leq \mathrm{Rg}(A \cdot B) \leq \min\{\mathrm{Rg}A, \mathrm{Rg}B\}$$

Definition. Seien $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$.

Dann heißt B **äquivalent zu** A , $B \sim A$, wenn es invertierbare Matrizen $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$ und $T \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gibt, sodass $B = SAT^{-1}$.

Bemerkung. Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $M(m \times n; \mathbb{K})$. (Aufgabe !)

Bemerkung. Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt :

$$B \sim A \;\Rightarrow\; \mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}B .$$

D.h. Äquivalente Matrizen sind gleichrangig.

Das folgende Resultat besagt, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Satz. Für $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ sind gleichwertig

1) $B \sim A$,

2) $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}B$.

Beweis. Zu zeigen ist 2) $\Rightarrow$ 1) : Gelte also $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}B = r$.

Betrachte die lineare Abbildung $L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $L(A)(x) = Ax$. Dann ist $\mathrm{Rg}L(A) = r$.

Nun gibt es Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$ sodass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(L(A)) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die lineare Abbildung, die durch $F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ gegeben ist.

Damit erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{K}^m \\ {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{A}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Dies wiederum bedeutet, dass A die darstellende Matrix der Abbildung F bzgl. der Koordinatensysteme $(\Phi_{\mathcal{A}})^{-1}$ und $(\Phi_{\mathcal{B}})^{-1}$ ist !!

Auf analoge Weise folgt, dass B die darstellende Matrix von F bzgl. geeigneter anderer Koordinatensysteme $(\Phi_{\mathcal{A}'})^{-1}$ und $(\Phi_{\mathcal{B}'})^{-1}$ ist.

Damit muß wegen der Transformationsformel $B = SAT^{-1}$ gelten, also $B \sim A$. $\square$

Bemerkung. Aus dem Vorhergehenden folgt u.a. :

jede Matrix $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ ist zu einer $m \times n$ Matrix B der Form $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent.