Lineare Gleichungssysteme

Eine Familie von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

heißt ein **lineares Gleichungssystem** (mit m Gleichungen und n Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und Koeffiezienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$) .

Die $m \times n$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ bezeichnet man auch als **Koeffizientenmatrix**.

In Matrizenschreibweise kann somit ein lineares Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ geschrieben werden, wobei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Man spricht von einem **homogenen Gleichungssystem**, wenn $Ax = 0$ (d.h. $b = 0$) . Wenn $b \neq 0$, liegt ein **inhomogenes Gleichungssystem** vor.

I. Homogene Gleichungssysteme

haben also die Form $Ax = 0$. Gesucht sind die **Lösungen** von $Ax = 0$, d.h. alle Vektoren $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = 0$.

Die Menge $W = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = 0\}$ heißt der **Lösungsraum** (des

Gleichungssystems $Ax = 0$) .

W ist offenbar der Kern der linearen Abbildung $L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $L(A)(x) = Ax$, und damit ein **Unterraum** von $\mathbb{R}^n$.

Um den Lösungsraum zu bestimmen, müssen wir also eine Basis für W bestimmen.

Wir beobachten weiters, dass ein homogenes Gleichungssystem stets lösbar ist (d.h. mindestens eine Lösung besitzt). $x = 0$ ist offenbar eine Lösung (natürlich kann es weitere Lösungen geben).

Die Dimensionsformel besagt $\dim \mathbb{K}^n = \dim \mathrm{Im} L(A) + \dim \mathrm{Ker} L(A)$.

Zusammen mit $\mathrm{Rg} A = \dim \mathrm{Im} L(A)$ erhalten wir somit

- $\dim W = n - \mathrm{Rg} A$.

Beobachtung. Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix.

Dann haben die Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $(SA)x = 0$ die gleichen Lösungsräume.

Beweis. i) $Ax = 0 \;\Rightarrow\; (SA)x = S(Ax) = S \cdot 0 = 0$.

ii) $(SA)x = 0 \;\Rightarrow S(Ax) = 0 \;\Rightarrow$

$Ax = E_m Ax = S^{-1}S(Ax) = S^{-1}((SA)x) = S^{-1} \cdot 0 = 0$. $\Box$

Folglich : Entsteht B aus A durch elementare Zeilenumformungen, dann haben $Ax = 0$ und $Bx = 0$ gleiche Lösungsräume (weil jeder elementaren Zeilenumformung die Multiplikation von links mit einer geeigneten Elementarmatrix enspricht) .

Damit ergibt sich folgende Vorgangsweise zur Bestimmung von W :

1) Gegeben sei $Ax = 0$, wobei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$.

Führe A in Zeilenstufenform B über. (Dann ist der Lösungsraum von $Ax = 0$ gleich dem Lösungsraum von $Bx = 0$)

2) Seien $b_{1j_1}, b_{2j_2}, \ldots, b_{rj_r}$ die "Stufenelemente" von B .

Dann ist $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}B = r$, also $\dim W = n - r$.

Werden nun die Unbestimmten x_i mit $i \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ als frei wählbare Parameter gesetzt, dann können $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ durch diese Paramter ausgedrückt werden.

Damit ist der Lösungraum W vollständig beschrieben.

(Beachte: $\dim W =$ Anzahl der freien Parameter)

Beispiel. siehe Tafel.

II. Inhomogene Gleichungssysteme

haben also die Form $Ax = b$ mit $b \neq 0$.

Wir bezeichnen mit $X = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = b\}$ den **Lösungsraum** von $Ax = b$.

Mit $Ax = 0$ bezeichnen wir das **zugehörige homogene Gleichungssystem**.

Bemerkung. Für $b \neq 0$ ist X **kein** Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ (allerdings ein sogenannter affiner Unterraum, i.e. eine Teilmenge der Form $X = v + W$ mit $W \lhd \mathbb{K}^n$) .

(Ist $Ax = b$ und $Ay = b$, dann ist $A(x + y) = Ax + Ay = 2b$, also $x, y \in X$, aber $x + y \notin X$)

Gelte $Ay = b$, i.e. y ist eine (spezielle) Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Für eine weitere Lösung x mit $Ax = b$ gilt dann, dass $z = x - y$ Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ist, i.e. $Az = 0$. $(Az = A(x - y) = Ax - Ay = b - b = 0)$

Damit ist also $x = z + y$ und folglich

Satz. Falls existent, erhält man die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems durch Addition **einer** speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems zur allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

Beobachtung.

Während ein homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$ immer eine Lösung besitzt (nämlich $x = 0$), ist ein inhomogenes Gleichungssystem nicht immer lösbar, wie man am Beispiel $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$ sieht.

Frage : Wann besitzt $Ax = b$ eine Lösung ?

Wird mit $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Abbildung $F(x) = Ax$ bezeichnet, dann ist $Ax = b$ klarerweise genau dann lösbar, wenn $b \in \mathrm{Im} F$.

Die Fragestellung führt zum Begriff der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Zu $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ heißt

$$A' = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M(m \times (n+1); \mathbb{K})$$

die (zugehörige) **erweiterte Koeffizientenmatrix**. Man beachte, dass im allgemeinen $\mathrm{Rg} A \leq \mathrm{Rg}(A, b)$.

Satz. Sei $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ gegeben. Dann gilt

$Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rg} A = \mathrm{Rg}(A, b)$

Bemerkungen.

• Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$, sodass das Gleichungssystem $Ax = b$ für **jede** rechte Seite $b \in \mathbb{K}^m$ lösbar ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn die lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $F(x) = Ax$ surjektiv ist,

also genau dann, wenn $\mathrm{Rg} A = m$.

• Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist **eindeutig lösbar** (i.e. es gibt genau eine Lösung) offenbar genau dann, wenn es lösbar ist und bei der allgemeinen Lösung von $Ax = 0$ keine freien Parameter auftreten. Dies ist genau dann gegeben, wenn $\mathrm{Rg}A = n$.

Folglich ist $Ax = b$ genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}(A, b) = n \ .$$

Ein Lösungsverfahren für $Ax = b$:

Man bringe die erweiterte Matrix $A' = (A, b)$ auf Zeilenstufenform

$$(A,b) \hookrightarrow \begin{pmatrix} \dots & b_{1j_1} & \dots & & & & & & c_1 \\ & 0 & \dots & b_{2j_2} & & & & & c_2 \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & b_{rj_r} & & & c_r \\ & & & & & & & & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_m \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathrm{Rg}A = r$, und $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A' = r$ ist, also genau dann wenn $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$ ist.

Wie im Falle eines homogenen Gleichungssystems ergeben sich als freie Parameter jene Unbestimmten x_i mit $i \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$.