# Determinanten

Durch Bildung der Determinante wird einer **quadratischen (!)** Matrix eine gewisse Zahl zuordnet. Die Determinante tritt besonders bei Fragen der Flächen- bzw. Volumsberechnung auf (siehe auch den Begriff der Jacobi-Determinante in der Analysis).

## I. Permutationen

$\forall\ n > 0$ sei $S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}\ :\ \sigma \text{ ist bijektiv}\}$ .

Dann ist $S_n$ eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen (vgl. früher) und heißt **symmetrische Gruppe** (vom Index $n$).

Die Elemente von $S_n$ heißen **Permutationen** (einer $n$-elementigen Menge).

$S_n$ hat $n!$ Elemente und ist für $n \geq 3$ **nicht** abelsch (d.h. $\exists\ \sigma, \tau \in S_n$ mit $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$ ) .

**Schreibweisen :**

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ für $\sigma \in S_n$
- $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \end{pmatrix}$ ... identische Abbildung
- $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \dots & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}$ für $\sigma, \tau \in S_n$

**Beispiel.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\tau \in S_n$ heißt **Transposition**, wenn $\tau$ lediglich zwei Elemente vertauscht und die übrigen Elemente fest läßt.

**Beispiel.** $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ist eine Transposition.

Man kann zeigen, dass sich jede Permutation $\sigma$ als Komposition von Transpositionen darstellen läßt. Bei jeder Darstellung von $\sigma$ ist entweder eine gerade Anzahl von Transpositionen oder eine ungerade Anzahl von Transpositionen erforderlich.

Als **Vorzeichen** bzw. **Signum** einer Transposition $\tau$ setzt man

$$\text{sign } \tau = -1 \ .$$

Das **Vorzeichen** bzw. **Signum** einer beliebigen Permutation $\sigma$ ist

$$\text{sign } \sigma = (-1)^k$$

wobei $\sigma$ als Komposition von $k$ Transpositionen dargestellt werden kann.

$\sigma \in S_n$ heißt **gerade**, wenn $\text{sign } \sigma = +1$ und **ungerade** wenn $\text{sign } \sigma = -1$.

Man kann weiters zeigen, dass für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ gilt

$$\text{sign } (\sigma_2 \circ \sigma_1) = \text{sign } \sigma_2 \cdot \text{sign } \sigma_1$$

## II. Determinanten

Wir verwenden in diesem Zusammenhang die Schreibweise $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ , wobei $a_i$ den $i$-ten Zeilenvektor der $n \times n$-Matrix $A$ bezeichnet.

**Definition.** Die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

**Bemerkung.** Weil $S_n$ $n!$ Elemente hat, treten für großes $n$ sehr viele Summanden auf. Schon aus diesem Grund ist es wünschenswert, einfachere Berechnungsformeln für die Determinante zu bestimmen.

**Bemerkung.** Man verwendet auch die Schreibweise

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Im folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften der Determinante angeführt. Aus Zeitgründen wird auf die Beweise verzichtet.

- det ist "linear in jeder Zeile", d.h. falls $a_i = a_i' + a_i''$ bzw. $a_i = \lambda a'''$ , dann ist

$$\det \begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dots \\ a_i^{'} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dots \\ a_i^{''} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$

$$\det \begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \dots \\ a_i^{'''} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

- $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1, a_2, \dots, a_n$ sind linear abhängig

Ist also im besonderen etwa $a_i = 0$ oder $a_i = a_j$ für $i \neq j$ dann gilt $\det A = 0$.

$\det A \neq 0$ bedeutet, dass $A$ invertierbar ist !

- $\det E_n = +1$

- $B$ entstehe aus $A$ durch Vertauschen von zwei (verschiedenen) Zeilen $\Rightarrow \quad \det B = -\det A \qquad$ (Vorzeichenwechsel !)

- $B$ entstehe aus $A$ durch Addition der $\lambda$-fachen $j$-ten Zeile zur $i$-ten Zeile $(i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \det B = \det A$ .

- Sei $A$ eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix. Dann ist $\det A$ das Produkt der Elemente in der Hauptdiagonalen, i.e.

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \ .$$

Führen wir also eine beliebige Matrix $A$ in eine Matrix $B$ in Zeilenstufenform über ($B$ ist dann eine obere Dreiecksmatrix), dann ist

$$\det A = (-1)^k b_{11}b_{22}\dots b_{nn}$$

wobei $k$ die Anzahl der verwendeten Zeilenvertauschungen ist.

- (**Determinantenproduktsatz**)

$$A, B \in M(n \times n; \mathbb{K}) \quad \Rightarrow \quad \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Ist $A$ invertierbar, also $AA^{-1} = E_n$, dann ist

$+1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ , also $\quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

- $\det A = \det({}^tA)$

- Ist $A$ eine "Block-Matrix" der Form $A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, wobei $A_1$ und $A_2$ quadratisch sind, dann gilt

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \ .$$

**Zur Berechnung von Determinanten:**

- Falls $n = 1$ , gibt es offenbar nur die identische Permutation, und für eine $1 \times 1$ Matrix $A = (a)$ gilt $\det A = a$ .

- Falls $n = 2$ , gibt es nur die beiden Permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Damit ist $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

- Falls $n = 3$ , ist $|S_3| = 3! = 6$ und

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \ .$$

Die Determinante einer $3 \times 3$ Matrix kann komfortabel mit der sogenannten **Regel von Sarrus** bestimmt werden.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

**Beispiel.** Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Mit $\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$ ist

$$\det A = 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 1) = 3$$

## III. Die komplementäre Matrix

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ . Für **festes** $i, j$ ersetze $a_{ij}$ durch $1$ und alle übrigen Elemente der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte durch $0$ .

Die entstehende Matrix werde mit $A_{ij}$ bezeichnet.

Die Matrix $A'_{ij}$ sei jene $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, welche aus $A$ durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte entsteht.

**Beispiel.** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Dann ist etwa

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A'_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A'_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Es gilt :** $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ und setze $c_{ij} = \det A_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ .

Dann heißt $\widetilde{A} = {}^t(c_{ij})$ die zu $A$ **komplementäre Matrix** .

Die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ existiert immer und hat die zentrale Eigenschaft

$$\widetilde{A} \cdot A = A \cdot \widetilde{A} = (\det A) \cdot E_n$$

**Beispiel.** Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\widetilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\widetilde{A} \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Also ist $\det A = 3$ .

**Folgerung.** Ist $A$ invertierbar, dann gilt offenbar

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$ .

Speziell für $n = 2$ ergibt sich mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A = ad - bc$ , dass

$\widetilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und somit

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

## IV. Der Entwicklungssatz von Laplace

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ mit $n \geq 2$ . Dann gilt

- (**Entwicklung nach der $i$-ten Zeile**)

$\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$ für jedes feste $1 \leq i \leq n$

- (**Entwicklung nach der $j$-ten Spalte**)

$\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij}$ für jedes feste $1 \leq j \leq n$

**Beispiel.** Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Entwicklung nach der 1. Zeile ergibt

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 3 \; .$$

Bei der Anwendung des Entwicklungssatzes von Laplace ist es im allgemeinen natürlich vorteilhaft, eine Zeile bzw. Spalte zu wählen, welche viele Nullen enthält.

## V. Die Cramersche Regel

Determinanten sind auch bei der Berechnung der eindeutig bestimmten Lösung eines Gleichungssystems anwendbar.

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gegeben, und sei $A$ invertierbar. Dann ist die eindeutig bestimmte Lösung durch $x = A^{-1}b$ gegeben.

Unter Zuhilfenahme von $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$ kann man zeigen, dass

$x_i = \frac{\det(a^1,\ldots,a^{i-1},b,a^{i+1},\ldots,a^n)}{\det A} \quad , \; 1 \leq i \leq n$ ist,

wobei $a^1, a^2, \ldots, a^n$ die Spalten von $A$ bezeichnen.

Diese Berechnungsweise heißt **Cramersche Regel**.

**Beispiel.** Gegeben sei

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \; ,$$

damit ist $A$ invertierbar und die Cramersche Regel anwendbar. Somit

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$