Orthonormalisierung

Wie schon im Falle $V = \mathbb{R}^n$ erwähnt, erhalten wir durch ein Skalarprodukt eine zugehörige Norm (Länge) eines Vektors und in weiterer Folge eine Metrik (Abstand zwischen zwei Vektoren). Darüberhinaus können wir den Winkel zwischen zwei Vektoren definieren.

Sei nun V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Wir setzen

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\ .$$

Dann gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$$

mit deren Hilfe gezeigt wird, dass $\|v\|$ eine **Norm** auf V ist, i.e.

$$\|v\| \geq 0 \quad , \quad \|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

Aus der Norm wiederum ergibt sich durch die Setzung $d(v, w) = \|v - w\|$ eine **Metrik** auf V , i.e.

$$d(v, w) \geq 0 \quad , \quad d(v, w) = 0 \;\Leftrightarrow\; v = w$$

$$d(v, w) = d(w, v)$$

$$d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u) \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

Wir erwähnen weiters die Ergebnisse

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle \quad \text{(Satz von Pythagoras)}$$

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{(Parallelogrammgleichung)}$$

Sind $v, w \neq 0$ dann heißt $\theta \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\theta = \tfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

der **Winkel** zwischen v und w .

Definition. Sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum.

1) $v, w \in V$ heißen **orthogonal** , $v \perp w$, wenn $\langle v, w \rangle = 0$

2) $U, W \subseteq V$ stehen aufeinander **orthogonal** , $U \perp W$, wenn

$$u \perp w \quad \forall\, u \in U \;\; \forall\, w \in W$$

3) Zu $W \subseteq V$ heißt

$$W^\perp = \{v \in V \;:\; v \perp w \quad \forall\, w \in W\}$$

das **orthogonale Komplement** zu W . (Man überlege sich, dass $W^\perp$ stets ein Untervektorraum ist)

4) Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren heißt **orthogonale Familie**, wenn

$$v_i \perp v_j \quad \forall\, i \neq j \;.$$

Sie heißt **orthonormal** wenn sie orthogonal ist und $\|v_i\| = 1 \quad \forall\, i \in I$ gilt.

5) Eine **Orthonormalbasis** (ONB) von V ist eine orthonormale Familie, welche auch eine Basis von V ist.

Beobachtung. Eine orthogonale Familie $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

Beweis. Sei $\lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_n v_{i_n} = 0$. Für jedes k ist dann

$$0 = \langle v_{i_k}, 0 \rangle = \langle v_{i_k}, \lambda_1 v_{i_1} + \ldots + \lambda_n v_{i_n} \rangle =$$

$$= \lambda_1 \langle v_{i_k}, v_{i_1} \rangle + \ldots + \lambda_n \langle v_{i_k}, v_{i_n} \rangle = \lambda_k \langle v_{i_k}, v_{i_k} \rangle$$

$$\Rightarrow \;\; \lambda_k = 0 \;\text{ weil }\; \langle v_{i_k}, v_{i_k} \rangle \neq 0 \;. \quad \square$$

Mit dem **Orthonormalisierungsverfahren von Schmidt** kann man in einem euklidischen (bzw. unitären) Vektorraum V mit $\dim V = n$ induktiv eine Orthonormalbasis konstruieren.

Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ irgendeine Basis von V und setze $w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$.

Seien $w_1, \ldots, w_m$ bereits orthogonal (bzw. orthonormal) und gelte

$$\operatorname{Span}(v_1,\ldots,v_m)=\operatorname{Span}(w_1,\ldots,w_m)$$

Setze nun $v^*=v_{m+1}-\sum\limits_{k=1}^{m}\langle w_k,v_{m+1}\rangle w_k$ und $w_{m+1}=\frac{1}{\|v^*\|}v^*$.

Dann ist $w_1,\ldots,w_{m+1}$ orthonormal und

$$\operatorname{Span}(v_1,\ldots,v_{m+1})=\operatorname{Span}(w_1,\ldots,w_{m+1})$$

Beispiel. Sei $V=\mathbb{R}^3$ mit Basis

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ ,\ v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- $w_1=\frac{1}{\|v_1\|}v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- $v^*=v_2-\langle w_1,v_2\rangle w_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad w_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$
- $v^*=v_3-\langle w_1,v_3\rangle w_1-\langle w_2,v_3\rangle w_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad w_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

Bemerkung. Sei $(v_1,\ldots,v_n)$ eine ONB von V und seien $v=x_1v_1+\ldots+x_nv_n$ und $w=y_1v_1+\ldots+y_nv_n$. Dann ist

$$\langle v,w\rangle=\langle x_1v_1+\ldots+x_nv_n,y_1v_1+\ldots+y_nv_n\rangle=\overline{x_1}y_1+\ldots\overline{x_n}y_n=\overline{x}^Ty$$

sowie $\langle v,v_i\rangle=\overline{x_i}$, also $v=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\langle v,v_i\rangle}v_i$.

Das heisst: Das Skalarprodukt $\langle v,w\rangle$ ist das kanonische Skalarprodukt der entsprechenden Koordinatenvektoren.

Von besonderem Interesse sind natürlich lineare Abbildungen, welche ein gegebenes Skalarprodukt invariant lassen.

Definition. Sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum.

Eine lineare Abbildung $F : V \to V$ heißt **orthogonal** (bzw. **unitär**), wenn

$$\langle F(v), F(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall\ v, w \in V$$

Grundlegende Eigenschaften von orthogonalen (unitären) Endomorphismen sind

(a) $\|F(v)\| = \|v\|$, $\|F(v) - F(w)\| = \|v - w\|$

Damit sind auch Norm und Metrik invariant.

(b) λ EW von $F \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1$

(Beweis: Wähle $v \neq 0$ mit $F(v) = \lambda v$. Dann ist

$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1$)

(c) $v \perp w \quad \Leftrightarrow \quad F(v) \perp F(w)$

(d) F ist injektiv

Folgerung. Ist $\dim V < \infty$, dann ist F auch bijektiv. In diesem Fall kann man leicht zeigen, dass F^{-1} ebenfalls orthogonal (bzw. unitär) ist.

Bemerkung. Man kann zeigen dass ein Endomorphismus mit $\|F(v)\| = \|v\|$ bereits orthogonal (bzw. unitär) ist.

Definition. Eine $n \times n$ Matrix A heißt (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) **orthogonal**

wenn $AA^T = E_n$.

Also ist eine orthogonale Matrix regulär und $A^{-1} = A^T$. Des weiteren ist offenbar $\det A = \pm 1$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt A **unitär** wenn $A\overline{A}^T = E_n$.

Also ist A wiederum regulär und $A^{-1} = \overline{A}^T$. Unter Verwendung von $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ zeigt man, dass $|\det A| = 1$. Damit ist $\det A$ eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis.

Bemerkung. Sei

$$O(n) = \{A \ : \ A \text{ ist eine orthogonale } n \times n \text{ Matrix}\}$$

$$U(n) = \{A \ : \ A \text{ ist eine unitäre } n \times n \text{ Matrix}\}$$

$$SO(n) = \{A \in O(n) \ : \ \det A = +1\}$$

$$SU(n) = \{A \in U(n) \ : \ \det A = +1\}$$

Dann bilden diese Mengen bezüglich der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe.

Man spricht von der **orthogonalen Gruppe**, der **unitären Gruppe**, der **speziellen orthogonalen Gruppe** und der **speziellen unitären Gruppe**.

Bemerkung. Direkte Ausrechnung ergibt, dass folgende Aussagen äquivalent sind :

1) A ist orthogonal (unitär),

2) die Spaltenvektoren von A sind eine ONB von $\mathbb{K}^n$,

3) die Zeilenvektoren von A sind eine ONB von $\mathbb{K}^n$.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{ist orthogonal,}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ist unitär.}$$

Bezüglich darstellender Matrizen zeigt man leicht

Satz. Sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum mit $\dim V = n$

, $F: V \to V$ linear und $\mathcal{B}$ eine ONB für V .

Dann ist F orthogonal (bzw. unitär) genau dann, wenn $M_{\mathcal{B}}(F)$ eine orthogonale (bzw. unitäre) Matrix ist.

Wir stellen uns nun die Frage, wann eine ONB aus Eigenvektoren besteht. Dies wird durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz. Sei V ein **unitärer** Vektorraum mit $\dim V = n$ und $F: V \to V$ unitär.

Dann besitzt V eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von F .

Bemerkung. Im reellen Fall, wo also V ein euklidischer Vektorraum ist und $F: V \to F$ orthogonal, gilt dies ebenfalls, sofern das charakteristische Polynom von F über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt.

Folgerungen. Sei V ein **unitärer** Vektorraum mit $\dim V = n$ und $F: V \to V$ unitär.

(a) F ist diagonalisierbar.

(b) Ist A eine unitäre $n \times n$ Matrix, dann existiert eine unitäre Matrix S mit

$$\overline{S}^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $|\lambda_i| = 1$, λ_i ist EW von A für jedes i .

(c) V ist die orthogonale Summe der Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten, d.h.

zum einen ist V die direkte Summe der Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten. Da man leicht zeigen kann dass $\mathrm{Eig}(F;\lambda) \perp \mathrm{Eig}(F;\mu)$ für $\lambda \neq \mu$, spricht man von der orthogonalen Summe.

Bemerkung. Im Fall, wo V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n$ und $F : V \to V$ ist, läßt sich die sogenannte "Kästchendiagonalform" erzielen, d.h. es existiert eine ONB $\mathcal{B}$ für V mit

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$, $\alpha_i \neq 0, \pi, 2\pi$ und $\det A_i = +1$

Von besonderer Bedeutung sind die selbstadjungierten Endomorphismen.

Definition. Sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum. Eine lineare Abbildung $F : V \to V$ heißt **selbstadjungiert**, wenn

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \forall\ v, w \in V$$

Bemerkung. Ist $\mathcal{B}$ eine ONB für V , dann ist $F : V \to V$ selbstadjungiert genau dann, wenn $M_{\mathcal{B}}(F)$ symmetrisch (bzw. Hermitesch) ist.

Bemerkung. Ist $F : V \to V$ selbstadjungiert, dann zerfällt das charakteristische Polynom von F über $\mathbb{R}$ (!) in Linearfaktoren. Im besonderen ist F dann auch diagonalisierbar, und V besitzt eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von F .