Übungsblatt 02 - Lineare Algebra - WS 2014/15

(Dorn, Tabatabei, Jäger, Kloiber, Kofler)

1. Man zeige, dass die 6 Lösungen der Gleichung $x^6 = 1$ mit der Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe bilden. Man stelle dazu auch die Verknüpfungstafel auf.

2. Definition: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq G$ heißt Untergruppe von $(G, \circ)$ wenn $\forall\ x, y \in U$ gilt, dass $x \circ y \in U$ und $x^{-1} \in U$.

Sei nun $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Untergruppe von $(G, \circ)$. Man betrachte die folgende Relation auf G : $x \sim y$ genau dann wenn $x^{-1} \circ y \in U$. Man beweise, dass das neutrale Element e von G in U liegt und dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

3. Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ die Menge der reellen 2×2 Matrizen mit den folgenden Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + c_2 d_1 & b_2 c_1 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Es sei (bereits) bekannt, dass $(M, +, \cdot)$ ein Ring ist.

Man zeige, dass $(M, +, \cdot)$ **kein** kommutativer Ring ist. Man weise weiters nach, dass es ein Einselement gibt. Wie sieht es aus?

4. Man zeige, dass die Gruppe S_3 keine abelsche Gruppe ist, d.h. man finde zwei Abbildungen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ wo $g \circ f \neq f \circ g$ ist.

5. Man untersuche, ob die folgenden Teilmengen des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ (mit den üblichen Operationen) Untervektorräume sind:

(a) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 0\}$

(b) $M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 1 + x_1 - x_2\}$

(c) $M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 \cdot x_2 \geq 0\}$

6. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$. Man zeige, dass

(a) es Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt sodass $\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda v_1 + \mu v_2$ ist ,

(b) es keine Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt sodass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda v_1 + \mu v_2$ ist.

7. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{2x}$. Man zeige, dass im Vektorraum $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ gilt: $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$ (Nullfunktion) $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.