Übungsblatt 04 - Lineare Algebra - WS 2014/15
(Dorn, Tabatabei, Jäger, Kloiber, Kofler)

22. Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (-1,1,1)$, $v_3 = (0,2,-1)$ des $\mathbb{R}^3$. Kann der Vektor $w = (2,2,1)$ im Sinne des Austauschlemmas gegen den Vektor v_2 ausgetauscht werden?

23. Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum V , und sei weiters $v = \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n$. Man zeige:
Ist $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \neq 1$, dann sind die Vektoren $v_1 - v, v_2 - v, \ldots, v_n - v$ linear unabhängig.

24. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x\cos x$, $f_3(x) = x^2 \cos x$ linear unabhängig sind.

25. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Weiters sei $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ und $W' = \mathrm{Span}(v_3, v_4)$.
Welche Vektoren $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liegen in $W \cap W'$?

26. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Wenden Sie geeignete elementare Zeilenumformungen an, sodass eine obere Dreiecksmatrix entsteht.

27. Wir betrachten die Matrizen $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass diese Matrizen hermitesch sind (siehe Beiblatt) und eine Basis von $M(2\times 2;\mathbb{C})$ bilden.

28. Zeigen Sie, dass eine hermitesche 2×2-Matrix die Form $\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ besitzt.

(Hinweis: Ansatz $A = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} \end{pmatrix}$ mit $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$)

29. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$.