Übungsblatt 04 - Lineare Algebra - WS 2014/15

(Dorn, Tabatabei, Jäger, Kloiber, Kofler)

(Beiblatt)

Etwas zu komplexen 2×2 Matrizen

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ komplexe Matrix. Dann ist die zugehörige **transponierte** Matrix A^T gegeben durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, i.e. $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Die zugehörige **konjugiert komplexe** Matrix $\overline{A}$ ist gegeben durch $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}$.

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ 1+i & 3+2i \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -i & 3+2i \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1-i & 3-2i \end{pmatrix}$

A heißt **hermitesch**, wenn $\overline{A}^T = A$. (Obige Matrix ist nicht hermitesch!)

Die **Determinante** von A ist die Zahl $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Die Schreibweise $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezeichnet das Gleichungssystem $b_{11}x + b_{12}y = 0$, $b_{21}x + b_{22}y = 0$, wobei x und y die gesuchten Unbekannten sind.

$\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von A , wenn $\det(A - \lambda E) = 0$, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Eigenwerte von A sind also die Lösungen der Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$.

Ist nun λ ein Eigenwert von A , dann ist beim Gleichungssystem $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur eine (!) Gleichung relevant, daher kann eine Unbekannte als Parameter t gesetzt werden und die andere Unbekannte dadurch ausgedrückt werden. Jeder derartige Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist dann ein **Eigenvektor** von A .

Beispiel. $(2-i)x + y = 0$. Setze $t = x$. Dann ist $y = (-2+i)t$.

Damit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ (-2+i)t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{C}$.