Übungsblatt 06 - Lineare Algebra - WS 2014/15

(Dorn, Tabatabei, Jäger, Kloiber, Kofler)

37. Sei $F : V \to W$ linear und bijektiv. Man zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \to V$ linear ist, i.e. $F^{-1}(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda F^{-1}(w_1) + \mu F^{-1}(w_2)$.

38. Sei $F : V \to W$ linear und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V . Man beweise, dass $\mathrm{Im} F = \mathrm{Span}(F(v_1), \ldots, F(v_n))$.

39. Gegeben sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 + 2x_3)$. Man bestimme Basen von $\mathrm{Im} F$ und $\mathrm{Ker} F$ und verifiziere die Dimensionsformel. (Man beachte, dass $\mathrm{Im} F$ von den Bildern der kanonischen Basisvektoren aufgespannt wird.)

40. Unter Verwendung der Dimensionsformel bestimme man zuerst $\mathrm{Ker} F$ und danach $\mathrm{Im} F$ von $F : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ wobei $F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_1 - a_0 + a_2 t + a_3 t^2$.

41. Sei $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ gegeben durch $F(z_1, z_2) = (-iz_2, iz_1)$. Man bestimme Basen von $\mathrm{Im} F$ und $\mathrm{Ker} F$.

42. Man berechne $A \cdot B$, wobei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

43. Man berechne das Produkt der Matrizen $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

44. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\dim V = \dim W = n$. Unter Verwendung der Dimensionsformel zeige man: F ist injektiv $\Rightarrow$ F ist bijektiv, und F ist surjektiv $\Rightarrow$ F ist bijektiv.

Sei $\mathbb{P}$ der Vektorraum aller reellen Polynome. Dieser hat eine Basis bestehend aus den Vektoren t^n , $n = 0, 1, 2, \ldots$. Sei F jene lineare Abbildung, welche durch $F(t^n) = t^{n+1}$ festgelegt ist. Man zeige, dass F injektiv ist aber nicht bijektiv.