σ-Algebren, Definition des Maßraums

Ziel der Maßtheorie ist es, Teilmengen einer Grundmenge X auf sinnvolle Weise einen "**Inhalt**" zuzuordnen.

Diese Zuordnung soll so beschaffen sein, dass dabei die intuitiven Begriffe von "Länge" (in $\mathbb{R}$), "Flächeninhalt" (im $\mathbb{R}^2$) und "Volumen" (im $\mathbb{R}^3$) in geeigneter Weise verallgemeinert werden.

Wir erwähnen zuerst einige mengentheoretische Konzepte und Bezeichnungen.

- Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X, i.e. $\mathcal{P}(X) = \{A \ : \ A \subseteq X\}$.

- Die **Differenz** von $A, B \subseteq X$ ist $A \setminus B = \{x \in A \ : \ x \notin B\}$.

- Die **symmetrische Differenz** von $A, B \subseteq X$ ist

  $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

  (also alle Elemente, die entweder in A oder in B, aber nicht in beiden Mengen liegen)

- Die **charakteristische Funktion** von $A \subseteq X$ ist die Abbildung

  $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ wobei

  $\chi_A(x) = 1$ wenn $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ wenn $x \notin A$.

Es ist einfach zu sehen, dass durch $A \mapsto \chi_A$ eine bijektive Entsprechung zwischen $\mathcal{P}(X)$ und der Menge aller Abbildungen $X \to \{0, 1\}$ gegeben ist.

Wir betrachten den Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit $\mathbb{K} = \{0, 1\}$. Die Menge aller Abbildungen $X \to \mathbb{K}$ mit der punktweise definierten Addition bzw. Multiplikation ist dann ein kommutativer Ring mit den konstanten Funktionen 0 als Nullelement und 1 als Einselement.

Im Sinne obiger Bijektion erhalten wir als Addition auf $\mathcal{P}(X)$ die symmetrische Differenz und als Multiplikation auf $\mathcal{P}(X)$ die Durchschnittsbildung. Folglich gilt

Satz. $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ist ein kommutativer Ring mit $\emptyset$ als Nullelement und X als Einselement.

Definition. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** (bzw. **Mengenring**), wenn $\mathcal{R}$ ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ ist.

Ein Ring $\mathcal{A}$ mit $X \in \mathcal{A}$ heißt **Algebra** .

Bemerkungen. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring. Dann gilt natürlich $\emptyset \in \mathcal{R}$.

Weil $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$, gilt für $A, B \in \mathcal{R}$ auch, dass $A \cup B \in \mathcal{R}$.

Weil $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, gilt für $A, B \in \mathcal{R}$ auch, dass $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Mit vollständiger Induktion folgt sofort, dass die endliche Vereinigung bzw. der endliche Durchschnitt von Mengen eines Rings wieder im Ring enthalten ist.

Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, dann gilt darüber hinaus, dass $X \setminus A \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Für den Aufbau einer fruchtbaren Maßtheorie werden wir nun Ringe und Algebren um eine weitere Eigenschaft erweitern, da wir insbesondere auch **abzählbare** Vereinigungen bzw. Durchschnitte betrachten wollen.

Definition. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ-Ring**, wenn $\mathcal{R}$ ein Ring ist und für jede Folge (A_n) von Mengen aus $\mathcal{R}$ gilt dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} .$$

Ein σ-Ring $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $X \in \mathcal{A}$ heißt **σ-Algebra** .

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen dann **meßbare Mengen** (bzgl. $\mathcal{A}$).

Satz. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein σ-Ring, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(b) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{R}$

(c) $A_n \in \mathcal{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

Satz. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(b) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$

(c) $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Bemerkung. Aus $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n))$ (De Morgan) folgt auch die Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Durchschnitte.

Wir kommen nun zur grundlegenden Struktur, mit der in der Maßtheorie gearbeitet wird. Dabei ist $\overline{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\} \cup \{\infty\}$ mit den offensichtlichen Rechenregeln.

Definition. Sei X eine Menge und Ω eine σ-Algebra auf X .

(a) Das Paar (X, Ω) heißt **Meßraum** . Die Elemente von Ω sind die **meßbaren Mengen**.

(b) Ein **Maß** ist eine Abbildung $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mit

(i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geq 0$

(ii) $\mu(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ für jede Folge (A_n) von

paarweise disjunkten Mengen aus Ω . D.h. μ ist σ**-additiv** .

(Gilt die Eigenschaft (ii) nur für endliche Vereinigungen, spricht man von der **Additivität** der Mengenfunktion.)

(c) Ist μ ein Maß auf (X, Ω) , dann heißt das Tripel (X, Ω, μ) ein **Maßraum** .

Gilt dabei $\mu(X) < \infty$, spricht man von einem **endlichen** Maßraum bzw. sagt, dass μ ein endliches Maß ist.

Gilt $\mu(X) = 1$, so heißt μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** .

Bemerkung. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum und $A \in \Omega$.

Dann ist offenbar $\Omega|_A = \{M \cap A \ : \ M \in \Omega\}$ wieder eine σ-Algebra (mit $\Omega|_A \subseteq \Omega$) und $\mu|_A$, die Einschränkung von μ auf $\Omega|_A$, ein Maß auf $(A, \Omega|_A)$.

Wir erhalten also den Maßraum $(A, \Omega|_A, \mu|_A)$.

Beispiel. Bei einem Würfelexperiment mit einem (nicht manipulierten) Würfel können wir als Grundraum $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nehmen und als σ-Algebra $\Omega = \mathcal{P}(X)$.

Setzen wir $\mu(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $1 \leq i \leq 6$, dann kann μ in offensichtlicher Weise für alle $A \subseteq X$ definiert werden. Weil $\mu(X) = 1$, ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beispiel. (**Zählmaß**)

Sei X eine Menge und $\Omega = \mathcal{P}(X)$. Für $A \subseteq X$ sei

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{wenn } A \text{ endlich ist und } n \text{ Elemente besitzt} \\ \infty & \text{wenn } A \text{ unendlich ist} \end{cases}$$

Beispiel. (**abzählbar-co-abzählbare σ-Algebra**)

Sei X eine überabzählbare Menge und

$$\Omega = \{A \subseteq X \ : \ A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar}\} .$$

Man zeigt leicht, dass Ω eine σ-Algebra auf X ist.

σ-Algebren sind in der Regel nicht durch Angabe ihrer Elemente gegeben, sondern oft durch Angabe eines sogenannten "Erzeugers" definiert. Diesbezüglich beobachten wir

Lemma. Seien Ω_i , $i \in I$ σ-Algebren auf X . Dann ist

$$\Omega = \bigcap_{i \in I} \Omega_i = \{A \subseteq X \ : \ A \in \Omega_i \ \ \forall\, i \in I\}$$

eine σ-Algebra auf X . (D.h. der beliebige Durchschnitt von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra)

Beweis. $\forall\, i \in I$ gilt $\emptyset \in \Omega_i$, also auch $\emptyset \in \Omega$.

Sei $A \in \Omega$. Dann ist $A \in \Omega_i$ $\forall\, i \in I$. Weil jedes Ω_i eine σ-Algebra ist , gilt auch $X \setminus A \in \Omega_i$ $\forall\, i \in I$. Also $X \setminus A \in \Omega$.

Sei $A_n \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A_n \in \Omega_i$ $\forall\, i \in I$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Damit ist $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega_i$ $\forall\, i \in I$ und folglich $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$. $\square$

Ist nun $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein **beliebiges** Mengensystem, dann können wir den Durchschnitt $[\mathcal{F}]$ aller σ-Algebren betrachten, welche $\mathcal{F}$ enthalten

$$[\mathcal{F}] = \bigcap \{\Omega \ : \ \Omega \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{F} \subseteq \Omega\}$$

Gemäß vorher ist $[\mathcal{F}]$ eine σ-Algebra, und zwar die **kleinste** σ-Algebra, welche $\mathcal{F}$ enthält.

Man nennt $[\mathcal{F}]$ auch **die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra** bzw. $\mathcal{F}$ einen Erzeuger von $[\mathcal{F}]$.

Bemerkung. Es ist von vornherein nicht klar, wie die Elemente von $[\mathcal{F}]$ beschrieben werden können. Möglich ist natürlich auch, dass für gewisse $\mathcal{F}$ sich herausstellt, dass $[\mathcal{F}] = \mathcal{P}(X)$ ist.