Reguläre Maße

Definition. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum, (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{B}(X) \subseteq \Omega$.

1) $A \in \Omega$ heißt **von außen μ-regulär**, wenn

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \ : \ A \subseteq O \ , \ O \ \text{ist offen}\}$$

2) $A \in \Omega$ heißt **von innen μ-regulär**, wenn

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \ : \ K \subseteq A \ , \ K \ \text{ist kompakt}\}$$

3) $A \in \Omega$ heißt **μ-regulär**, wenn A von innen und von außen μ-regulär ist.

4) μ heißt **regulär**, wenn alle $A \in \Omega$ μ-regulär sind.

Bemerkung. Ein reguläres Maß ist also dadurch charakterisiert, dass sich für eine beliebige meßbare Menge deren Maß dadurch bestimmen läßt, dass man auf offene oder kompakte Mengen zurückgreift.

Bemerkung. Man überlege sich: Ist μ ein endliches Maß, dann ist $A \in \Omega$ μ-regulär genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $O \supseteq A$ und eine kompakte Menge $K \subseteq A$ existiert mit $\mu(O \setminus K) < \varepsilon$.

Lemma. (**Regularitätslemma**)

Sei μ ein endliches Maß auf einer σ-Algebra $\Omega \supseteq \mathcal{B}(X)$. Dann ist

$$R_\mu = \{A \in \Omega \ : \ A \ \ \mu\text{-regulär}\}$$

ein σ-Ring.

Beweis. $\emptyset \in R_\mu$ ist trivial.

Seien $A, B \in R_\mu$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es kompakte Mengen $K, L \subseteq X$ und offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit

$$K \subseteq A \subseteq U \ , \ L \subseteq B \subseteq V \quad \text{und} \quad \mu(U \setminus K) + \mu(V \setminus L) < \varepsilon \ .$$

Dann ist $K \cup L$ kompakt und $U \cup V$ offen, sowie

$$K \cup L \subseteq A \cup B \subseteq U \cup V \quad , \quad (U \cup V) \setminus (K \cup L) \subseteq (U \setminus K) \cup (V \setminus L)$$

Folglich ist $\mu((U \cup V) \setminus (K \cup L)) < \varepsilon$ und damit $A \cup B \in R_\mu$.

Ebenso erhalten wir $K \cap L \subseteq A \cap B \subseteq U \cap V$ und $(U \cap V) \setminus (K \cap L) \subseteq (U \setminus K) \cup (V \setminus L)$, woraus $\mu((U \cap V) \setminus (K \cap L)) < \varepsilon$ folgt und damit $A \cap B \in R_\mu$.

Wegen $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ genügt es für den Nachweis von $A \setminus B \in R_\mu$ gleich $B \subseteq A$ vorauszusetzen. Ebenso können wir dann annehmen, dass $L \subseteq K$ und $V \subseteq U$ ist (ansonsten ersetze K durch $K \cup L$ bzw. V durch $V \cap U$).

Dann gilt $K \setminus V \subseteq A \setminus B \subseteq U \setminus L$, wobei $K \setminus V$ kompakt ist und $U \setminus L$ offen ist. Weiters ist

$$(U \setminus L) \setminus (K \setminus V) = (U \setminus K) \cup (V \setminus L) \quad \text{und damit}$$

$\mu((U \setminus L) \setminus (K \setminus V)) \leq \mu(U \setminus K) + \mu(V \setminus L) < \varepsilon$. Also $A \setminus B \in R_\mu$.

Seien nun $A_n \in R_\mu$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit paarweise disjunkt.

Zu $\varepsilon > 0$ existieren kompakte Mengen K_n und offene Mengen U_n mit

$$K_n \subseteq A_n \subseteq U_n \quad \text{und} \quad \mu(U_n \setminus K_n) < \tfrac{\varepsilon}{2^n} \ .$$

Wegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \mu(X) < \infty$, $\mu(U_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) < \infty$.

Daher gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \mu(U_n) < \varepsilon$.

Die Menge $K = \bigcup\limits_{n=1}^{N} K_n$ ist dann kompakt, $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ ist offen und es gilt $\quad K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq U \quad$ sowie $\quad U \setminus K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (U_n \setminus K_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} U_n$.

Damit ist $\quad \mu(U \setminus K) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(U_n \setminus K_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(U_n) < 2\varepsilon$.

Also gilt auch $\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R_\mu$. $\quad \Box$

Satz. (**Regularitätssatz**)

Sei μ ein endliches Borel-Maß auf X und sei jede offene Teilmenge von X μ-regulär. Dann ist μ ein reguläres Borel-Maß.

Beweis. Weil laut Voraussetzung X μ-regulär ist, ist nach dem Regularitätslemma R_μ eine σ-Algebra, welche alle offenen Mengen enthält. Damit gilt auch $\mathcal{B}(X) \subseteq R_\mu$. $\quad \Box$

Folgerung. Ist jede offene Teilmenge von X σ-kompakt, dann ist jedes endliche Borel-Maß auf X regulär.

Beweis. Klarerweise ist jede offene Menge von außen μ-regulär. Um den Beweis abzuschließen zeigen wir, dass jede σ-kompakte Menge von innen μ-regulär ist.

Sei $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, wobei die Mengen K_n kompakt sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $C_n = K_1 \cup \ldots \cup K_n$. Dann sind alle C_n kompakt, $C_n \subseteq C_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Wegen der Stetigkeit des Maßes gilt $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) =$

$= \sup\{\mu(K) \ : \ K \subseteq A \ , \ K \text{ kompakt}\} \quad \Box$

Die bisherigen Ergebnisse beschränkten sich auf endliche Maße. Um zu entsprechenden Aussagen über das Lebesgue-Maß zu gelangen, müssen wir nach geeeigneten Erweiterungen suchen.

Satz. Sei $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ ein Maßraum mit den Eigenschaften

1) $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n$, wobei jedes O_n offen ist und $\mu(O_n) < \infty$,

2) O_n ist μ-regulär für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist μ regulär.

Beweis. Die (eingeschränkten) Maße $\mu_n = \mu|_{O_n}$ sind nach dem Regularitätssatz regulär.

Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ und $A_n = A \cap O_n$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U_n mit

$A_n \subseteq U_n \subseteq O_n$ und $\mu(U_n \setminus A_n) = \mu_n(U_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Dann ist

$U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ offen, $A \subseteq U$ und $\mu(U \setminus A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A_n) < \varepsilon$.

Dies bedeutet, dass μ von außen regulär ist.

Sei nun $\alpha < \mu(A)$. Setzt man $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, dann gilt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad , \quad B_n \subseteq B_{n+1} \text{ und } \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) \ .$$

Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\delta = \mu(B_N) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n) - \alpha > 0$.

Wegen der Regularität von μ_n existieren kompakte Mengen K_n mit $K_n \subseteq A_n$ und $\mu_n(A_n \setminus K_n) < \frac{\delta}{N}$.

Die Menge $K = \bigcup\limits_{n=1}^{N} K_n \subseteq A$ ist dann kompakt und es ist

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus K_n)) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n \setminus K_n) < N \cdot \frac{\delta}{N} = \delta \ .$$

Wegen $(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n) \setminus (\bigcup\limits_{n=1}^{N} K_n) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{N} (A_n \setminus K_n)$ erhalten wir

$$\mu((\bigcup_{n=1}^{N} A_n) \setminus K) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus K_n)) \leq \delta \quad \text{und weiters}$$

$$\delta + \alpha = \mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \mu(K) + \mu((\bigcup_{n=1}^{N} A_n) \setminus K) \leq \mu(K) + \delta \; .$$

Damit ist $\mu(K) \geq \alpha$ und folglich ist μ auch von innen regulär. Insgesamt ist μ damit regulär. $\square$

Folgerung. Das Lebesgue-Maß λ_p ist ein reguläres Borel-Maß.

Beweis. Wir sahen bereits früher, dass jede σ-kompakte Menge von innen regulär ist. Jede offene Menge im $\mathbb{R}^p$ ist eine abzählbare Vereinigung von (kompakten) dyadischen Elementarzellen, also σ-kompakt und damit auch von innen regulär.

Weiters ist $\mathbb{R}^p = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n$ mit $O_n = (-n, n) \times \ldots \times (-n, n)$ und offenbar gilt $\lambda_p(O_n) < \infty$. $\square$

Zum Abschluß sei ohne Beweis eine weitere wichtige Aussage erwähnt.

Satz. (**Ulam**)

Jedes endliche Borel-Maß auf einem polnischen Raum X ist regulär.