Konvergenzsätze

Satz. (Satz von der **monotonen Konvergenz**, Satz von B. Levi)

Sei $f_n : X \to [0, \infty]$ eine Folge von Funktionen mit

(i) $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \quad \forall\, x$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x$ (punktweise Konvergenz)

Dann gilt $\int_X f(x)d\mu(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$

(D.h. Integration und Grenzwertbildung können vertauscht werden)

Beweis. f ist nach einer früheren Aussage wieder meßbar.

Setzen wir $\alpha_n = \int_X f_n d\mu$ dann gilt $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ (wegen $f_n \le f_{n+1}$).

Die monoton steigende Folge (α_n) hat einen Grenzwert $\alpha \in [0, \infty]$.

Wir erhalten weiters

$$\alpha_n = \int_X f_n(x)d\mu(x) \le \int_X f(x)d\mu(x) \quad \Rightarrow \quad \alpha \le \int_X f(x)d\mu(x)$$

Damit verbleibt zu zeigen dass $\alpha \ge \int_X f(x)d\mu(x)$.

Sei s eine einfache Funktion mit $0 \le s \le f$ und sei $0 \le c < 1$.

Nun definieren wir

$$E_n = \{x \in X \; : \; f_n(x) \ge c \cdot s(x)\} = (f_n - c \cdot s)^{-1}([0, \infty])$$

Die Mengen E_n sind meßbar und es gilt

$$E_n \subseteq E_{n+1} \quad \text{und} \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n \quad (\text{weil } c \cdot s(x) < f(x))$$

Damit gilt

$$\alpha_n = \int_X f_n(x)d\mu(x) \ge \int_{E_n} f_n(x)d\mu(x) \ge c \int_{E_n} s(x)d\mu(x) = c \cdot \Phi(E_n)$$

(Φ ist das durch s definierte Maß)

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert mit der Stetigkeit von Φ

$$\alpha \geq c \cdot \Phi(X) \quad \text{für alle} \quad 0 \leq c < 1 \ .$$

Daraus folgt nun $\alpha \geq \Phi(X) = \int_X s(x) d\mu(x)$ und weiters

$$\alpha \geq \sup_{n\to\infty} \int_X s(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) \quad \square$$

Folgerung. Sei $f_n \geq 0$ eine Folge meßbarer Funktionen.

Dann gilt $\int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x)$.

Beweis. Betrachten wir die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Wegen $f_k \geq 0$ ist die Folge (s_n) monoton steigend und wir können den Satz von B. Levi anwenden. $\square$

Folgerung. Seien $a_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i, j$.

Dann gilt $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$

Beweis. Übung.

Die folgende Aussage gilt für eine beliebige Folge von positiven meßbaren Funktionen.

Satz. (**Lemma von Fatou**)

Für jede Folge $f_n : X \to [0, \infty]$ von meßbaren Funktionen gilt

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Beweis. Wir setzen $g_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x)$. Dann gilt

$$g_n(x) \leq f_n(x) \quad \text{und} \quad 0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \quad \text{sowie}$$

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz und $\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ erhalten wir schließlich

$$\lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X (\lim_{n\to\infty} g_n) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \ . \quad \square$$

Wir sahen bereits früher: ist $s \ge 0$ eine einfache Funktion, dann wird durch $\phi(E) = \int_E s d\mu$ ein Maß geliefert. Dieses Ergebnis kann nun auf positive meßbare Funktionen erweitert werden.

Satz. Sei $f : X \to [0,\infty]$ eine meßbare Funktion auf (X,Ω,μ) .

Setze $\phi(E) = \int_E f d\mu$ für $E \in \Omega$.

Dann ist ϕ ein Maß und es gilt $\int_X g d\phi = \int_X (g\cdot f) d\mu$ für alle meßbaren Funktionen $g : X \to [0,\infty]$.

Beweis. $\phi(\emptyset) = 0$ weil das Integral über einer Menge vom Maß 0 gleich Null ist.

$\phi(E) \ge 0$ gilt wegen $f \ge 0$ und der Monotonie des Integrals.

Seien (E_n) paarweise disjunkt und $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Dann gilt $f(x)\cdot\chi_E(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)\cdot\chi_{E_n}(x)$ und mit der ersten Folgerung des Satzes über die monotone Konvergenz erhalten wir

$$\phi(E) = \int_E f d\mu = \int_X f\cdot\chi_E d\mu = \int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f\cdot\chi_{E_n}) d\mu =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f\cdot\chi_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\phi(E_n) \ .$$

Damit ist ϕ ein Maß.

Sei nun $t = \sum\limits_i b_i\chi_{B_i}$ eine einfache Funktion mit $b_i \ge 0$. Dann ist

$$\int_X t d\phi = \sum_i b_i\phi(B_i) = \sum_i b_i\int_{B_i} f d\mu = \sum_i b_i\int_X f\chi_{B_i} d\mu =$$

$$= \int_X \sum_i b_i\chi_{B_i} f d\mu = \int_X (t\cdot f) d\mu$$

Nun betrachten wir eine Folge (t_n) von einfachen Funktionen, die von unten monoton gegen g konvergiert. Dann gilt

$\int_X g d\phi = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X t_n d\phi = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X (t_n \cdot f) d\mu = \int_X (g \cdot f) d\mu$

weil $(t_n \cdot f)$ monoton von unten gegen $g \cdot f$ konvergiert. $\Box$

Bemerkung. Die Funktion f heißt in obigem Zusammenhang **Dichtefunktion** von ϕ bezüglich μ .

Man schreibt $d\phi = f d\mu$.

Korollar. Gelte $d\nu = f d\mu$ und $d\rho = g d\nu$ für positive meßbare Funktionen f und g .

Dann gilt $d\rho = (gf) d\mu$.

Beweis. Für $A \in \Omega$ gilt $\rho(A) = \int_A g d\nu = \int_A (gf) d\mu$. $\Box$

Beispiel. Betrachte $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß und $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Dann wird durch $\phi(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ein neues Maß definiert, das **Gaußsche Maß**.

Beispiel. Es beschreibe $\rho(x, y, z)$ die Massendichte. Dann ist durch

$\int_K \rho d\lambda = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz$

die **Masse** von $K \subseteq \mathbb{R}^3$ als Integral über die Massendichte gegeben.

Satz. (Berechnung von Bildmaßen)

Sei $T : (X, \Omega) \to (X', \Omega')$ eine meßbare Abbildung und $T(\mu)$ das Bildmaß von μ . Dann gilt

1. $\int_{X'} f dT(\mu) = \int_X (f \circ T) d\mu$ für alle meßbaren Funktionen $f : X' \to [0, \infty]$.

2. Eine Ω'-meßbare Funktion f ist genau dann $T(\mu)$-integrierbar, wenn $f \circ T$ μ-integrierbar ist. Es gilt dann die gleiche Formel wie in 1.

Beweis.

Ad 1. Sei $s = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A'_j}$ mit $\alpha_j \geq 0$ eine einfache Funktion auf X' .

Dann ist $s \circ T = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $A_j = T^{-1}(A'_j)$.

Weil $T(\mu)(A'_j) = \mu(A_j)$ ist, folgt aus der Definition des Bildmaßes die obige Gleichheit für einfache Funktionen.

Sei nun $f \geq 0$ eine meßbare Funktion auf X' . Wähle eine monoton steigende Folge (s_n) von einfachen Funktionen mit $s_n \to f$.

Dann ist $(s_n \circ T)$ eine monoton steigende Folge mit $s_n \circ T \to f \circ T$.

$\int_X (f \circ T) d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_X (s_n \circ T) d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{X'} s_n dT(\mu) = \int_{X'} f dT(\mu)$

Ad 2. Eine Zerlegung in positiven und negativen Anteil führt auf die Behauptung, wenn man beachtet dass

$\int_{X'} f^+ dT(\mu) = \int_X (f^+ \circ T) d\mu = \int_X (f \circ T)^+ d\mu \quad \square$