Konvexe Funktionen

Definition. Eine Funktion $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn

$$\phi((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y)$$

für alle $x, y \in (a,b)$ und $0 \le \lambda \le 1$.

Bemerkung. Ist $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex, dann ist ϕ stetig auf (a,b) .

Beweis. Übung.

Bemerkung. Sei $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex und $a < s < t < u < b$.

Mit $x = s$, $y = u$ und $t = (1-\lambda)s + \lambda u$ erhalten wir

$$\phi(t) \le (1-\lambda)\phi(s) + \lambda\phi(u) = \phi(s) - \lambda\phi(s) + \lambda\phi(u) \Rightarrow$$

$$\phi(t) - \phi(s) \le \lambda(\phi(u) - \phi(s))$$

Wegen $t = (1-\lambda)s + \lambda u$ gilt $\lambda = \frac{t-s}{u-s}$ und folglich

$\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \le \frac{\phi(u)-\phi(s)}{u-s}$. (Monotonie der Differenzenquotienten)

Satz. (Ungleichung von **Jensen**)

Sei (X, Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X,\mu)$ mit $a < f(x) < b \quad \forall\, x \in X$.

Dann gilt für jede auf (a,b) konvexe Funktion ϕ dass

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \le \int_X (\phi \circ f) d\mu$$

Beweis. Wegen $a < f(x) < b$ gilt

$$a = a\mu(X) = \int_X a d\mu < \int_X f d\mu < \int_X b d\mu = b\mu(X) = b\ .$$

Setzen wir also $t = \int_X f d\mu$ dann gilt $a < t < b$.

Für jedes beliebige s mit $a < s < t$ und ein festes u mit $t < u < b$ gilt dann gemäß vorher

$\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \leq \frac{\phi(u)-\phi(s)}{u-s}$ und folglich existiert das endliche Supremum

$$\beta = \sup_{a<s<t} \frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \quad \text{und für } a < s < t \text{ gilt}$$

$$\frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \phi(s) \geq \phi(t) + \beta(s-t) \ .$$

Für $t < u < b$ gilt dann $\beta \leq \frac{\phi(u)-\phi(s)}{u-s}$, also $\phi(u) \geq \phi(s) + \beta(u-s)$.

Mit der Stetigkeit von ϕ und $s \to t$ erhalten wir

$$\phi(u) \geq \phi(t) + \beta(u-t) \ .$$

Dies bedeutet aber, dass für **alle** $s \in (a,b)$ gilt $\phi(s) \geq \phi(t) + \beta(s-t)$.

Speziell für $s = f(x)$ gilt dann $\phi(f(x)) \geq \phi(t) + \beta(f(x)-t)$.

Integration liefert nun

$$\int_X (\phi \circ f) d\mu \geq \int_X \phi(t) d\mu + \beta \int_X f d\mu - \beta \int_X t d\mu =$$
$$= \phi(t)\mu(X) + \beta t - \beta t \mu(X) = \phi(t) = \phi(\int_X f d\mu) \ . \quad \square$$

Beispiel. Sei $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ mit $\mu(\{P_i\}) = \frac{1}{n}$, $\phi(x) = e^x$ und $f(P_i) = x_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann ist $\int_X f d\mu = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ und damit

$$e^{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}) \ .$$

Mit der Setzung $y_i = e^{x_i}$ ergibt sich die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$(y_1 \ldots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{y_1+\ldots+y_n}{n}$$

Beispiel. Wir wählen in der obigen Situation nun ein anderes Maß, nämlich $\mu(\{P_i\}) = \alpha_i$ mit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Dann ist $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ (das sogenannte gewichtete Mittel).

Mit der Vorgangsweise wie oben erhalten wir

$$y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 y_1 + \dots \alpha_n y_n \ .$$

Im speziellen gilt $y_1^{\frac{1}{p}} y_2^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} y_1 + \frac{1}{q} y_2$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bemerkung. Aus früheren Überlegungen folgte bereits, dass $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. Nun untersuchen wir den Fall $p > 1$.

Satz. Seien f und g meßbar, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p und q heißen dann konjugiert).

1. $\int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (**Hölder Ungleichung**)

2. $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (**Minkowski Ungleichung**)

Beweis.

Ad 1. Setze $A = \|f\|_p$, $B = \|g\|_p$.

Falls $A = 0$ (oder $B = 0$) gilt $f = 0$ fast überall (oder $g = 0$ fast überall). Dann ist die Ungleichung trivial. Sei also $A \neq 0$, $B \neq 0$. Wenn dann $A = \infty$ oder $B = \infty$ dann ist die Ungleichung ebenfalls trivial. Sei damit $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$.

Nun setzen wir $F = \frac{|f|}{A}$, $G = \frac{|g|}{B}$.

Dann ist aber $\int_X F^p d\mu = 1$ und $\int_X G^q d\mu = 1$.

Mit vorher erhalten wir

$$FG = (F^p)^{\frac{1}{p}} (G^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} F^p + \frac{1}{q} G^q \quad \Rightarrow$$

$$\int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X G^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

Folglich ist $\int_X \frac{|f|}{A} \frac{|g|}{B} d\mu \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Ad 2. Wir verwenden die Hölder Ungleichung und $\frac{p}{q} = p - 1$. Für $\|f + g\|_p = 0$ ist die Ungleichung trivial.

$\int_X |f + g|^p d\mu = \int_X |f + g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu =$

$= \int_X |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f + g|^{p-1} d\mu \leq$

$\leq \|f\|_p (\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p (\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu)^{\frac{1}{q}} =$

$= (\|f\|_p + \|g\|_p)(\int_X |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{q}} \quad \Rightarrow$

$(\int_X |f + g|^p d\mu)^{1-\frac{1}{q}} = (\int_X |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. $\square$

Bemerkung. Für $p = q = 2$ erhalten wir aus der Hölder Ungleichung als Spezialfall die Ungleichung von **Cauchy-Schwarz**, nämlich

$$\int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \ .$$

Bemerkung. Auf dem $L^2(X, \mu)$ kann ein Skalarprodukt definiert werden, nämlich

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g} d\mu \ \ (\text{für } \mathbb{C}) \ \text{ bzw. } \ \langle f, g \rangle = \int_X fg d\mu \ \ (\text{für } \mathbb{R})$$

Dies ist möglich, weil eben $\int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$ für $f, g \in L^2(X, \mu)$.

Satz. Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(X, \mu)$ ein Banachraum (und für $p = 2$ damit ein Hilbertraum).

Beweis. Man überzeugt sich leicht (insbesondere mit der Minkowski Ungleichung), dass die Normeigenschaften erfüllt sind. Zu zeigen bleibt die Vollständigkeit.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $L^p(X, \mu)$. Dann existiert eine Indexfolge (n_i) mit

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Nun definieren wir $g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ und $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$.

Dann ist (g_k) eine monotone Folge und es gilt $\|g_k\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ und damit $|g| < \infty$ fast überall.

Wegen $f_{n_{k+1}}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ konvergiert die Folge (f_{n_k}) punktweise fast überall absolut gegen eine Grenzfunktion f .

Wir wollen nun zeigen, dass f auch der Limes bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist und in $L^p(X,\mu)$ liegt. Weil (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist dann f auch der Grenzwert von (f_n) .

Mit dem Lemma von Fatou ist

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu = \int_X \lim_{i\to\infty} |f_{n_i} - f_m|^p d\mu = \int_X \liminf_{i\to\infty} |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \leq$$

$$\leq \liminf_{i\to\infty} \int_X |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \ .$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $N_0(\varepsilon)$ sodass $\|f_{n_i} - f_m\|_p < \varepsilon$ für alle $m \geq N_0(\varepsilon)$.

Dies bedeutet dann aber $\|f - f_m\|_p < \varepsilon$ für $m \geq N_0(\varepsilon)$. Damit konvergiert (f_n) im Sinne der p-Norm gegen f .

Nun sind f_m , $f - f_m \in L^p(X,\mu)$, und damit gilt auch $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(X,\mu)$. $\square$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $L^\infty(X,\mu)$ ebenfalls ein Banachraum bezüglich der Norm $\|f\|_\infty$ ist.

Satz. Sei S die Menge aller einfachen meßbaren Funktionen auf X sodass $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$.

Dann liegt S dicht (bezüglich der p-Norm) in $L^p(X,\mu)$.

Beweis. $S \subseteq L^p(X,\mu)$ weil für jedes $s \in S$ die Menge $\{x : s(x) \neq 0\}$ ein endliches Maß hat.

Umgkehrt zeige man zur Übung, dass für eine einfache Funktion $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j} \in L^p(X,\mu)$ gilt dass $\mu(A_j) < \infty$ falls $\alpha_j \neq 0$.

Sei nun $f \in L^p(X,\mu)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f \geq 0$ annehmen (sonst betrachte die Zerlegung in f^+ , f^- bzw. $(\mathrm{Re} f)^+$, $(\mathrm{Re} f)^-$, $(\mathrm{Im} f)^+$, $(\mathrm{Im} f)^-$)

Nach dem Approximationssatz existiert eine steigende Folge (s_n) von einfachen Funktionen, welche punktweise gegen f konvergiert.

$s_n \leq f \quad \Rightarrow \quad \int_X |s_n|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad s_n \in L^p(X,\mu) \quad \Rightarrow \quad s_n \in S$

$|f - s_n| \leq 2|f| \quad \Rightarrow \quad |f - s_n|^p \leq 2^p |f|^p \in L^p(X,\mu)$

Mit dem Satz über die dominierte Konvergenz folgt nun

$\int_X |f - s_n|^p d\mu \to 0$ bzw. $\|f - s_n\|_p \to 0$. $\square$

Die folgende Aussage wird ohne Beweis angeführt. Sie erlaubt uns später zu zeigen, dass die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^p(X,\mu)$ liegt.

Satz. (**Lusin**)

Sei μ ein reguläres Borel-Maß auf dem metrischen Raum (X,d) . Sei weiters $f : X \to \mathbb{C}$ meßbar mit $\mu(\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}) < \infty$.

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(X,\mathbb{C})$ und ein $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(A) < \varepsilon$ sodass $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in X \setminus A$.

g kann so gefunden werden, dass $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Satz. $C_c(X)$ ist dicht in $L^p(X,\mu)$ für $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Gemäß vorher liegt die Menge S der einfachen Funktionen von $L^p(X,\mu)$ dicht in $L^p(X,\mu)$. Daher genügt es zu zeigen, dass zu jedem $s \in S$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(X)$ existiert mit $\|g - s\|_p < \varepsilon$.

Nach dem Satz von Lusin gibt es ein $g \in C_c(X)$ und ein $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $g(x) = s(x) \quad \forall\, x \in X \setminus A$, $\mu(A) < \varepsilon$ und $\sup |g(x)| \leq \sup |s(x)|$ f.ü.

Weiters ist

$$|g(x) - s(x)| \leq \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in X \setminus A \\ 2|s(x)| & \text{wenn } x \in A \end{cases}$$

Folglich ist $\|s - g\|_p^p \leq \int_{X\setminus A} 0 d\mu + 2^p \int_A |s|^p d\mu \leq (\|s\|_\infty)^p 2^p \varepsilon$. $\square$