

σ -Algebren, Definition des Maßraums

Ziel der Maßtheorie ist es, Teilmengen einer Grundmenge X auf sinnvolle Weise einen "Inhalt" bzw. ein "Maß" zuzuordnen.

Diese Zuordnung soll so beschaffen sein, dass dabei die intuitiven Begriffe von "Länge" (in \mathbb{R}), "Flächeninhalt" (im \mathbb{R}^2) und "Volumen" (im \mathbb{R}^3) in geeigneter Weise verallgemeinert werden.

Wir erwähnen zuerst einige mengentheoretische Konzepte und Bezeichnungen.

- Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X , i.e. $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

- Die **Differenz** von $A, B \subseteq X$ ist $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

- Die **symmetrische Differenz** von $A, B \subseteq X$ ist

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(also alle Elemente, die entweder in A oder in B , aber nicht in beiden Mengen liegen)

- Die **charakteristische Funktion** von $A \subseteq X$ ist die Abbildung

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{wobei}$$

$$\chi_A(x) = 1 \quad \text{wenn } x \in A \quad \text{und} \quad \chi_A(x) = 0 \quad \text{wenn } x \notin A.$$

Es ist einfach zu sehen, dass durch $A \mapsto \chi_A$ eine bijektive Entsprechung zwischen $\mathcal{P}(X)$ und der Menge aller Abbildungen $X \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben ist.

Wir betrachten den Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit $\mathbb{K} = \{0, 1\}$. Die Menge aller Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{K}$ mit der punktweise definierten Addition bzw. Multiplikation ist dann ein kommutativer Ring mit den konstanten Funktionen 0 als Nullelement und 1 als Einselement.

Im Sinne obiger Bijektion erhalten wir als Addition auf $\mathcal{P}(X)$ die symmetrische Differenz und als Multiplikation auf $\mathcal{P}(X)$ die Durchschnittsbildung. Folglich gilt

Satz. $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ist ein kommutativer Ring mit \emptyset als Nullelement und X als Einselement.

Definition. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Ring** (bzw. **Mengenring**), wenn \mathcal{R} ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ist.

Ein Ring \mathcal{A} mit $X \in \mathcal{A}$ heißt **Algebra**.

Bemerkungen. Sei \mathcal{R} ein Ring. Dann gilt natürlich $\emptyset \in \mathcal{R}$.

Weil $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$, gilt für $A, B \in \mathcal{R}$ auch, dass $A \cup B \in \mathcal{R}$.

Weil $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$, gilt für $A, B \in \mathcal{R}$ auch, dass $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Mit vollständiger Induktion folgt sofort, dass die endliche Vereinigung bzw. der endliche Durchschnitt von Mengen eines Rings wieder im Ring enthalten ist.

Ist \mathcal{A} eine Algebra, dann gilt darüber hinaus, dass $X \setminus A \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Für den Aufbau einer fruchtbaren Maßtheorie werden wir nun Ringe und Algebren um eine weitere Eigenschaft erweitern, da wir insbesondere auch **abzählbare** Vereinigungen bzw. Durchschnitte betrachten wollen.

Definition. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **σ -Ring**, wenn \mathcal{R} ein Ring ist und für jede Folge (A_n) von Mengen aus \mathcal{R} gilt dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

Ein σ -Ring $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $X \in \mathcal{A}$ heißt **σ -Algebra**.

Die Elemente von \mathcal{A} heißen dann **meßbare Mengen** (bzgl. \mathcal{A}).

Satz. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein σ -Ring, wenn folgende Eigenschaften

erfüllt sind

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(b) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$

(c) $A_n \in \mathcal{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} .$

Satz. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine σ -Algebra, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

(c) $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} .$

Bemerkung. Aus $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \right)$ (De Morgan) folgt auch die Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Durchschnitte.

Wir kommen nun zur grundlegenden Struktur, mit der in der Maßtheorie gearbeitet wird. Dabei ist $\overline{\mathbb{R}^+} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\}$ mit den offensichtlichen Rechenregeln.

Definition. Sei X eine Menge und Ω eine σ -Algebra auf X .

(a) Das Paar (X, Ω) heißt **Meßraum** . Die Elemente von Ω sind die **meßbaren Mengen**.

(b) Ein **Maß** ist eine Abbildung $\mu : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ mit

(i) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geq 0$

(ii) $\mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ für jede Folge (A_n) von

paarweise disjunkten Mengen aus Ω . D.h. μ ist **σ -additiv** .

(Gilt die Eigenschaft (ii) nur für endliche Vereinigungen, spricht man von der **Additivität** der Mengenfunktion.)

(c) Ist μ ein Maß auf (X, Ω) , dann heißt das Tripel (X, Ω, μ) ein **Maßraum**.

Gilt dabei $\mu(X) < \infty$, spricht man von einem **endlichen** Maßraum bzw. sagt, dass μ ein endliches Maß ist.

Gilt $\mu(X) = 1$, so heißt μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.

Bemerkung. Im allgemeinen, also wenn $\Omega \neq \mathcal{P}(X)$, wird **nicht** allen Teilmengen von X ein Maß zugeordnet. Es können also "nicht-meßbare" Teilmengen auftreten.

Bemerkung. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum und $A \in \Omega$.

Dann ist offenbar $\Omega|_A = \{M \cap A : M \in \Omega\}$ wieder eine σ -Algebra (mit $\Omega|_A \subseteq \Omega$) und $\mu|_A$, die Einschränkung von μ auf $\Omega|_A$, ein Maß auf $(A, \Omega|_A)$.

Wir erhalten also den Maßraum $(A, \Omega|_A, \mu|_A)$.

Beispiel. Bei einem Würfelexperiment mit einem (nicht manipulierten) Würfel können wir als Grundraum $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ nehmen und als σ -Algebra $\Omega = \mathcal{P}(X)$.

Setzen wir $\mu(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $1 \leq i \leq 6$, dann kann μ in offensichtlicher Weise für alle $A \subseteq X$ definiert werden. Weil $\mu(X) = 1$, ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beispiel. (Zählmaß)

Sei X eine Menge und $\Omega = \mathcal{P}(X)$. Für $A \subseteq X$ sei

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{wenn } A \text{ endlich ist und } n \text{ Elemente besitzt} \\ \infty & \text{wenn } A \text{ unendlich ist} \end{cases}$$

Beispiel. (abzählbar-co-abzählbare σ -Algebra)

Sei X eine überabzählbare Menge und

$$\Omega = \{A \subseteq X : A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar}\}.$$

Man zeigt leicht, dass Ω eine σ -Algebra auf X ist.

σ -Algebren sind in der Regel nicht durch Angabe ihrer Elemente gegeben, sondern oft durch Angabe eines sogenannten "Erzeugers" definiert. Diesbezüglich beobachten wir

Lemma. Seien $\Omega_i, i \in I$ σ -Algebren auf X . Dann ist

$$\Omega = \bigcap_{i \in I} \Omega_i = \{A \subseteq X : A \in \Omega_i \ \forall i \in I\}$$

eine σ -Algebra auf X . (D.h. der beliebige Durchschnitt von σ -Algebren ist wieder eine σ -Algebra)

Beweis. $\forall i \in I$ gilt $\emptyset \in \Omega_i$, also auch $\emptyset \in \Omega$.

Sei $A \in \Omega$. Dann ist $A \in \Omega_i \ \forall i \in I$. Weil jedes Ω_i eine σ -Algebra ist, gilt auch $X \setminus A \in \Omega_i \ \forall i \in I$. Also $X \setminus A \in \Omega$.

Sei $A_n \in \Omega, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A_n \in \Omega_i \ \forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}$.

Damit ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega_i \ \forall i \in I$ und folglich $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Omega$. \square

Ist nun $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein **beliebiges** Mengensystem, dann können wir den Durchschnitt $[\mathcal{F}]$ aller σ -Algebren betrachten, welche \mathcal{F} enthalten

$$[\mathcal{F}] = \bigcap \{ \Omega : \Omega \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{F} \subseteq \Omega \}$$

Gemäß vorher ist $[\mathcal{F}]$ eine σ -Algebra, und zwar die **kleinste** σ -Algebra, welche \mathcal{F} enthält.

Man nennt $[\mathcal{F}]$ auch **die von \mathcal{F} erzeugte σ -Algebra** bzw. \mathcal{F} einen Erzeuger von $[\mathcal{F}]$.

Bemerkung. Es ist von vornherein nicht klar, wie die Elemente von $[\mathcal{F}]$ beschrieben werden können. Möglich ist natürlich auch, dass für gewisse \mathcal{F} sich herausstellt, dass $[\mathcal{F}] = \mathcal{P}(X)$ ist.