

Das Lebesgue-Integral

Bei der Einführung des Integralbegriffs gehen wir schrittweise vor. Zunächst erklären wir das Integral von charakteristischen Funktionen, danach von positiven einfachen Funktionen und anschließend von positiven meßbaren Funktionen. Abschließend definieren wir den Integralbegriff für integrierbare Funktionen.

Definition. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum und $E \in \Omega$. Dann ist

$$\int_X \chi_E(x) d\mu(x) = \mu(E).$$

Einfache Funktionen sind ja Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen. Allerdings kann eine einfache Funktion auf verschiedene Arten als Linearkombination von charakteristischen Funktionen dargestellt werden.

Lemma.

$$\text{Gelte } s(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{B_k}(x)$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k).$$

Beweis. Setze $A_{m+1} = B_1, \dots, A_{m+n} = B_n$ und betrachte die Familie \mathcal{D} aller Durchschnitte $\bigcap_{i=1}^{m+n} M_i$, wobei $M_i = A_i$ oder $M_i = X \setminus A_i$.

Die Elemente von \mathcal{D} sind dann paarweise disjunkt, da es für je zwei verschiedene Elemente ein i gibt sodass die eine Menge in A_i und die andere Menge in $X \setminus A_i$ liegt.

Des weiteren ist jede Menge A_j die Vereinigung aller Mengen in \mathcal{D} , welche Teilmengen von A_j sind.

Seien nun C_1, \dots, C_r die verschiedenen Elemente von \mathcal{D} . Dann hat $s(x)$

eine Darstellung

$$s(x) = \sum_{l=1}^r \gamma_l \chi_{C_l}(x) \quad \text{wobei} \quad \gamma_l = \sum_{\substack{j=1 \\ C_l \subseteq A_j}}^m \alpha_j = \sum_{\substack{k=1 \\ C_l \subseteq B_k}}^n \beta_k .$$

Wegen $A_j = \bigsqcup_{C_l \subseteq A_j} C_l$ gilt nun

$$\sum_{l=1}^r \gamma_l \mu(C_l) = \sum_{l=1}^r \sum_{\substack{j=1 \\ C_l \subseteq A_j}}^m \alpha_j \mu(C_l) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{\substack{l=1 \\ C_l \subseteq A_j}}^r \mu(C_l) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) .$$

Analog folgt $\sum_{l=1}^r \gamma_l \mu(C_l) = \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k) . \quad \square$

Damit ist folgende Definition sinnvoll, da sie nicht von der jeweiligen Darstellung von $s(x)$ abhängt.

Definition. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum und $s(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}(x)$ eine einfache Funktion.

Dann wird für eine meßbare Menge $E \in \Omega$ das Integral von $s(x)$ über E definiert durch

$$\int_E s(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap E) .$$

Bemerkung. Im besonderen ist damit $\int_X s(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) .$

Ist $s(x) = \chi_E(x)$, dann gilt $\int_X \chi_E(x) d\mu(x) = \int_E d\mu(x) = \mu(E) .$

Lemma. Sei $s = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j} \geq 0$ eine einfache Funktion und $E \in \Omega$.

Dann wird durch

$$\phi(E) = \int_E s(x) d\mu(x)$$

ein Maß auf (X, Ω) definiert.

Beweis. Zu zeigen ist die σ -Additivität von ϕ . Seien E_i paarweise

disjunkt und $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Dann ist

$$\begin{aligned}\phi(E) &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap E) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(E_i). \quad \square\end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir die "üblichen" Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen.

Lemma. Seien s und t einfache Funktionen auf X , $E \in \Omega$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_E (s(x) + t(x)) d\mu(x) = \int_E s(x) d\mu(x) + \int_E t(x) d\mu(x)$$

$$\int_E c \cdot s(x) d\mu(x) = c \int_E s(x) d\mu(x)$$

Beweis.

Wir betrachten dazu die kanonischen (!) Darstellungen $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$ und $t = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j}$ und setzen $E_{ij} = A_i \cap B_j \cap E$.

Wegen $A_i = (A_i \cap B_1) \cup \dots \cup (A_i \cap B_n)$ ist $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^n \chi_{A_i \cap B_j}$ und folglich

$$s = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j}. \text{ Ebenso ist } t = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \beta_j \chi_{A_i \cap B_j} \text{ und damit}$$

$$s + t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

$$\text{Nun ist } \int_E (s + t) d\mu = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \mu(E_{ij}) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(E_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap E) + \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j \cap E) = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$$

Die zweite Aussage folgt aus der Tatsache, dass $c \cdot s(x) = \sum_{i=1}^m c\alpha_i \chi_{A_i}$. \square

Nachdem nun das Integral von einfachen Funktionen bekannt ist, können wir das Integral von positiven meßbaren Funktionen definieren.

Definition. Sei $f : X \rightarrow [0, \infty]$ meßbar. Wir definieren

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sup \int_E s(x) d\mu(x) ,$$

wobei das Supremum über alle einfache Funktionen $s(x)$ mit $0 \leq s(x) \leq f(x)$ gebildet wird.

Satz. (Elementare Eigenschaften des Integrals)

Seien f und g positive Funktionen.

1. $f \leq g \Rightarrow 0 \leq \int_E f(x) d\mu(x) \leq \int_E g(x) d\mu(x)$ (Monotonie)
2. $A \subseteq B \Rightarrow \int_A f(x) d\mu(x) \leq \int_B f(x) d\mu(x)$ (Inklusionseigenschaft)
3. $c \geq 0 \Rightarrow \int_E (c \cdot f(x)) d\mu(x) = c \int_E f(x) d\mu(x)$
4. $\int_E f(x) d\mu(x) = \int_X (f(x) \chi_E(x)) d\mu(x)$
5. $\int_E (f(x) + g(x)) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x) + \int_E g(x) d\mu(x)$
6. $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f(x) d\mu(x) = 0$
7. $E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$
8. $\int_E f(x) d\mu(x) = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0$

Beweis.

Ad 1. Gilt $s \leq f$, dann auch $s \leq g$, folglich

$$\int_E s(x) d\mu(x) \leq \sup_{0 \leq s \leq g} \int_E s(x) d\mu(x) = \int_E g(x) d\mu(x) \quad (\text{obere Schranke})$$

$$\Rightarrow \int_E f(x) d\mu(x) = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s(x) d\mu(x) \leq \int_E g(x) d\mu(x)$$

Ad 2. Nach einem Lemma zuvor ist $\phi(E) = \int_E s(x)d\mu(x)$ ein Maß. Wegen $A \subseteq B$ ist dann $\phi(A) \leq \phi(B)$, also für $s \leq f$

$$\int_A s(x)d\mu(x) \leq \int_B s(x)d\mu(x) \leq \sup_{0 \leq s \leq f} \int_B s(x)d\mu(x) = \int_B f(x)d\mu(x)$$

$$\Rightarrow \int_A f(x)d\mu(x) = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_A s(x)d\mu(x) \leq \int_B f(x)d\mu(x)$$

Ad 3. Folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für einfache Funktionen und Supremumbildung.

Ad 4. Zur Übung.

Ad 5. Wir verwenden dazu den (später bewiesenen) Satz von der monotonen Konvergenz. Nach dem Approximationssatz sind f und g der punktweise Limes einer monoton steigenden Folge von einfachen Funktionen, also $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ und $g = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$.

Dann ist $f + g = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n)$ und die Folge $(s_n + t_n)$ ist ebenfalls monoton steigend.

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist dann

$$\begin{aligned} \int_X (f + g)d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n)d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (\int_X s_n d\mu + \int_X t_n d\mu) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X t_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \end{aligned}$$

Des weiteren ist

$$\begin{aligned} \int_E (f + g)d\mu &= \int_X (f + g)\chi_E d\mu = \int_X (f\chi_E + g\chi_E)d\mu = \\ &= \int_X f\chi_E d\mu + \int_X g\chi_E d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu . \end{aligned}$$

Ad 6. Zur Übung.

Ad 7. Sei $0 \leq s = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i} \leq f$. Dann ist

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^m a_i \mu((A_i \cap E_1) \cup (A_i \cap E_2)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i \cap E_1) + \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i \cap E_2) = \int_{E_1} s d\mu + \int_{E_2} s d\mu \leq \\
&\leq \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu
\end{aligned}$$

Zu zeigen ist nun $\int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu \leq \int_E f d\mu$.

Falls $\int_E f d\mu = \infty$, ist die Ungleichung erfüllt. Sei also $\int_E f d\mu < \infty$.

Dann ist $\int_{E_1} f d\mu < \infty$ und $\int_{E_2} f d\mu < \infty$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle einfache Funktionen (in der kanonischen Darstellung)

$$s_1 = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i} \leq f \quad \text{und} \quad s_2 = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{B_j} \leq f \quad \text{mit}$$

$$\int_{E_1} f d\mu \leq \int_{E_1} s_1 d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \int_{E_2} f d\mu \leq \int_{E_2} s_2 d\mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definiere $s(x)$ durch $s(x) = a_i$ wenn $x \in A_i \cap E_1$ und $s(x) = b_j$ wenn $x \in B_j \cap E_2$.

Dann ist $s \leq f$ und

$$\varepsilon + \int_E s d\mu = \varepsilon + \int_{E_1} s_1 d\mu + \int_{E_2} s_2 d\mu \geq \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu. \quad \text{Also ist}$$

$$\int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu \leq \int_E s d\mu + \varepsilon \leq \int_E f d\mu + \varepsilon. \quad \text{Folglich ist}$$

$$\int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Ad 8. " \Rightarrow " : Sei $E_n = \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\} \subseteq E$. Dann ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in E : f(x) > 0\} \quad \text{und}$$

$$0 = \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(E_n) \Rightarrow \mu(E_n) = 0 \quad \text{und folglich}$$

$$\mu(\{x \in E : f(x) > 0\}) = 0.$$

" \Leftarrow " : Setze $E_1 = \{x \in E : f(x) > 0\}$, $E_2 = \{x \in E : f(x) = 0\}$.

Wegen 7. ist $\int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$.

$\int_{E_1} f d\mu = 0$ laut Voraussetzung und 6.

$\int_{E_2} f d\mu = 0$ weil $f = 0$ auf E_2 . \square

Folgerung. Aus 6. und 7. folgt weiters :

Ist $E_1 \subseteq E$ und $\mu(E_1) = 0$ dann $\int_E f d\mu = \int_{E \setminus E_1} f d\mu$.

Daraus wiederum leite man (Übung !) her :

$$E = E_1 \cup E_2, \mu(E_1 \cap E_2) = 0 \Rightarrow \int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu$$

Wie schon erwähnt, kann für eine positive Funktion $\int_E f d\mu = \infty$ sein.

Damit kommen wir zum Begriff der **Integrierbarkeit** (nach Lebesgue) einer Funktion.

Definition. Sei f meßbar auf dem Maßraum (X, Ω, μ) .

(a) : $f \geq 0$ heißt **integrierbar** (auf X) wenn $\int_X f d\mu < \infty$

(b) : $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt **integrierbar** wenn f^+ **und** f^- integrierbar sind. In diesem Fall definiert man

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

f ist also genau dann integrierbar wenn $\int_X |f| d\mu < \infty$.

(c) : $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **integrierbar** wenn $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Man definiert dann $\int_X f d\mu = \int_X \operatorname{Re} f d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f d\mu$.

Bemerkung. Mit $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(X, \mu)$ bezeichnen wir die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, mit $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(X, \mu)$ die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.