

Konvexe Funktionen

Definition. Eine Funktion $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn

$$\phi((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\phi(x) + \lambda\phi(y)$$

für alle $x, y \in (a, b)$ und $0 \leq \lambda \leq 1$.

Bemerkung. Ist $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, dann ist ϕ stetig auf (a, b) .

Beweis. Übung.

Bemerkung. Sei $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $a < s < t < u < b$.

Mit $x = s$, $y = u$ und $t = (1 - \lambda)s + \lambda u$ erhalten wir

$$\phi(t) \leq (1 - \lambda)\phi(s) + \lambda\phi(u) = \phi(s) - \lambda\phi(s) + \lambda\phi(u) \Rightarrow$$

$$\phi(t) - \phi(s) \leq \lambda(\phi(u) - \phi(s))$$

Wegen $t = (1 - \lambda)s + \lambda u$ gilt $\lambda = \frac{t-s}{u-s}$ und folglich

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t-s} \leq \frac{\phi(u) - \phi(s)}{u-s}. \quad (\text{Monotonie der Differenzenquotienten})$$

Daraus folgt $\phi(t) \leq \phi(s) + \frac{\phi(u) - \phi(s)}{u-s}(t - s)$.

Weil $\frac{u-t}{u-s} + \frac{t-s}{u-s} = 1$ ist, gilt nun

$$\frac{u-t}{u-s}\phi(t) + \frac{t-s}{u-s}\phi(t) \leq (1 - \frac{t-s}{u-s})\phi(s) + \frac{t-s}{u-s}\phi(u) = \frac{u-t}{u-s}\phi(s) + \frac{t-s}{u-s}\phi(u).$$

Folglich $\frac{u-t}{u-s}(\phi(t) - \phi(s)) \leq \frac{t-s}{u-s}(\phi(u) - \phi(t))$ und damit

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t-s} \leq \frac{\phi(u) - \phi(t)}{u-t}.$$

Satz. (Ungleichung von **Jensen**)

Sei (X, Ω, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ mit $a < f(x) < b \quad \forall x \in X$.

Dann gilt für jede auf (a, b) konvexe Funktion ϕ dass

$$\phi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\phi \circ f) d\mu$$

Beweis. Wegen $a < f(x) < b$ gilt

$$a = a\mu(X) = \int_X a d\mu < \int_X f d\mu < \int_X b d\mu = b\mu(X) = b .$$

Setzen wir also $t = \int_X f d\mu$ dann gilt $a < t < b$.

Für jedes beliebige s mit $a < s < t$ und ein festes u mit $t < u < b$ gilt dann gemäß vorher

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} \leq \frac{\phi(u) - \phi(t)}{u - t} \quad \text{und folglich existiert das endliche Supremum}$$

$$\beta = \sup_{a < s < t} \frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} \quad \text{und für } a < s < t \text{ gilt}$$

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \phi(s) \geq \phi(t) + \beta(s - t) .$$

Für $t < u < b$ gilt dann $\beta \leq \frac{\phi(u) - \phi(t)}{u - t}$, also $\phi(u) \geq \phi(t) + \beta(u - t)$.

Dies bedeutet aber, dass für **alle** $s \in (a, b)$ gilt $\phi(s) \geq \phi(t) + \beta(s - t)$.

Speziell für $s = f(x)$ gilt dann $\phi(f(x)) \geq \phi(t) + \beta(f(x) - t)$.

Integration liefert nun

$$\begin{aligned} \int_X (\phi \circ f) d\mu &\geq \int_X \phi(t) d\mu + \beta \int_X f d\mu - \beta \int_X t d\mu = \\ &= \phi(t)\mu(X) + \beta t - \beta t\mu(X) = \phi(t) = \phi\left(\int_X f d\mu\right) . \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel. Sei $X = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ mit $\mu(\{P_i\}) = \frac{1}{n}$, $\phi(x) = e^x$ und $f(P_i) = x_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Dann ist $\int_X f d\mu = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ und damit

$$e^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} \leq \frac{1}{n} (e^{x_1} + \dots + e^{x_n}) .$$

Mit der Setzung $y_i = e^{x_i}$ ergibt sich die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}$$

Beispiel. Wir wählen in der obigen Situation nun ein anderes Maß, nämlich $\mu(\{P_i\}) = \alpha_i$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Dann ist $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ (das sogenannte gewichtete Mittel).

Mit der Vorgangsweise wie oben erhalten wir

$$y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n .$$

Im speziellen gilt $y_1^{\frac{1}{p}} y_2^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} y_1 + \frac{1}{q} y_2$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bemerkung. Aus früheren Überlegungen folgte bereits, dass

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

Nun untersuchen wir den Fall $p > 1$.

Satz. Seien f und g meßbar, $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p und q heißen dann konjugiert).

1. $\int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$ (**Hölder Ungleichung**)
2. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (**Minkowski Ungleichung**)

Beweis.

Ad 1. Setze $A = \|f\|_p$, $B = \|g\|_q$.

Falls $A = 0$ (oder $B = 0$) gilt $f = 0$ fast überall (oder $g = 0$ fast überall). Dann ist die Ungleichung trivial. Sei also $A \neq 0$, $B \neq 0$. Wenn dann $A = \infty$ oder $B = \infty$ dann ist die Ungleichung ebenfalls trivial. Sei damit $0 < A < \infty$, $0 < B < \infty$.

Nun setzen wir $F = \frac{|f|}{A}$, $G = \frac{|g|}{B}$.

Dann ist aber $\int_X F^p d\mu = 1$ und $\int_X G^q d\mu = 1$.

Mit vorher erhalten wir

$$FG = (F^p)^{\frac{1}{p}}(G^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q \Rightarrow$$

$$\int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X G^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Folglich ist $\int_X \frac{|f||g|}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}} d\mu \leq 1 \Rightarrow \int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q .$

Ad 2. Wir verwenden die Hölder Ungleichung und $\frac{p}{q} = p - 1$. Für $\|f + g\|_p = 0$ ist die Ungleichung trivial.

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\mu &= \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu = \\ &= \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \\ &\leq \|f\|_p (\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p (\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) (\int_X |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \\ (\int_X |f + g|^p d\mu)^{1-\frac{1}{q}} &= (\int_X |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p . \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung. Für $p = q = 2$ erhalten wir aus der Hölder Ungleichung als Spezialfall die Ungleichung von **Cauchy-Schwarz**, nämlich

$$\int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Bemerkung. Auf dem $L^2(X, \mu)$ kann ein Skalarprodukt definiert werden, nämlich

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu \quad (\text{für } \mathbb{C}) \quad \text{bzw.} \quad \langle f, g \rangle = \int_X f g d\mu \quad (\text{für } \mathbb{R})$$

Dies ist möglich, weil eben $\int_X |f||g| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$ für $f, g \in L^2(X, \mu)$.

Satz. Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(X, \mu)$ ein Banachraum (und für $p = 2$ damit ein Hilbertraum).

Beweis. Man überzeugt sich leicht (insbesondere mit der Minkowski Ungleichung), dass die Normeigenschaften erfüllt sind. Zu zeigen bleibt die Vollständigkeit.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $L^p(X, \mu)$. Dann existiert eine Indexfolge (n_i) mit

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i} \quad i = 1, 2, \dots$$

Nun definieren wir $g_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ und $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$.

Dann ist (g_k) eine monotone Folge und es gilt $\|g_k\|_p \leq 1$, $\|g\|_p \leq 1$ und damit $|g| < \infty$ fast überall.

Wegen $f_{n_{k+1}}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^k (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ konvergiert die Folge (f_{n_k}) punktweise fast überall absolut gegen eine Grenzfunktion f .

Wir wollen nun zeigen, dass f auch der Limes bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist und in $L^p(X, \mu)$ liegt. Weil (f_n) eine Cauchy-Folge ist, ist dann f auch der Grenzwert von (f_n) .

Mit dem Lemma von Fatou ist

$$\begin{aligned} \int_X |f - f_m|^p d\mu &= \int_X \lim_{i \rightarrow \infty} |f_{n_i} - f_m|^p d\mu = \int_X \liminf_{i \rightarrow \infty} |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \leq \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_i} - f_m|^p d\mu. \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $N_0(\varepsilon)$ sodass $\|f_{n_i} - f_m\|_p < \varepsilon$ für alle $m \geq N_0(\varepsilon)$.

Dies bedeutet dann aber $\|f - f_m\|_p < \varepsilon$ für $m \geq N_0(\varepsilon)$. Damit konvergiert (f_n) im Sinne der p -Norm gegen f .

Nun sind $f_m, f - f_m \in L^p(X, \mu)$, und damit gilt auch $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(X, \mu)$. \square

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $L^\infty(X, \mu)$ ebenfalls ein Banachraum bezüglich der Norm $\|f\|_\infty$ ist.

Satz. Sei S die Menge aller einfachen meßbaren Funktionen auf X sodass $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$.

Dann liegt S dicht (bezüglich der p -Norm) in $L^p(X, \mu)$.

Beweis. $S \subseteq L^p(X, \mu)$ weil für jedes $s \in S$ die Menge $\{x : s(x) \neq 0\}$ ein endliches Maß hat.

Umgekehrt zeige man zur Übung, dass für eine einfache Funktion $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j} \in L^p(X, \mu)$ gilt dass $\mu(A_j) < \infty$ falls $\alpha_j \neq 0$.

Sei nun $f \in L^p(X, \mu)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f \geq 0$ annehmen (sonst betrachte die Zerlegung in f^+ , f^- bzw. $(\operatorname{Re}f)^+$, $(\operatorname{Re}f)^-$, $(\operatorname{Im}f)^+$, $(\operatorname{Im}f)^-$)

Nach dem Approximationssatz existiert eine steigende Folge (s_n) von einfachen Funktionen, welche punktweise gegen f konvergiert.

$$s_n \leq f \Rightarrow \int_X |s_n|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu < \infty \Rightarrow s_n \in L^p(X, \mu) \Rightarrow s_n \in S$$

$$|f - s_n| \leq 2|f| \Rightarrow |f - s_n|^p \leq 2^p |f|^p \Rightarrow f - s_n \in L^p(X, \mu)$$

Mit dem Satz über die dominierte Konvergenz folgt nun

$$\int_X |f - s_n|^p d\mu \rightarrow 0 \text{ bzw. } \|f - s_n\|_p \rightarrow 0. \quad \square$$

Die folgende Aussage wird ohne Beweis angeführt. Sie erlaubt uns später zu zeigen, dass die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^p(X, \mu)$ liegt.

Satz. (Lusin)

Sei μ ein reguläres Borel-Maß auf dem metrischen Raum (X, d) . Sei weiters $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar mit $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) < \infty$.

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(X, \mathbb{C})$ und ein $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(A) < \varepsilon$ sodass $f(x) = g(x) \quad \forall x \in X \setminus A$.

g kann so gefunden werden, dass $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Satz. $C_c(X)$ ist dicht in $L^p(X, \mu)$ für $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Gemäß vorher liegt die Menge S der einfachen Funktionen von $L^p(X, \mu)$ dicht in $L^p(X, \mu)$. Daher genügt es zu zeigen, dass zu

jedem $s \in S$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(X)$ existiert mit $\|g - s\|_p < \varepsilon$.

Nach dem Satz von Lusin gibt es ein $g \in C_c(X)$ und ein $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $g(x) = s(x) \quad \forall x \in X \setminus A$, $\mu(A) < \varepsilon$ und $\sup |g(x)| \leq \sup |s(x)|$ f.ü.

Weiters ist

$$|g(x) - s(x)| \leq \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in X \setminus A \\ 2|s(x)| & \text{wenn } x \in A \end{cases}$$

Folglich ist $\|s - g\|_p^p \leq \int_{X \setminus A} 0 d\mu + 2^p \int_A |s|^p d\mu \leq (\|s\|_\infty)^p 2^p \varepsilon$. \square