Maßtheoretische Konvergenzbegriffe

Für Funktionenfolgen gibt es eine Reihe von Konvergenzbegriffen. So sind nicht nur in der Analysis die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige Konvergenz von besonderer Bedeutung.

In der Maßtheorie zeigt sich, dass es meist ausreicht, wenn eine Eigenschaft "fast überall" - also bis auf eine Nullmenge - erfüllt ist.

Definition. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum.

(i) (f_n) ist **punktweise konvergent f.ü.** gegen f wenn es ein $A \in \Omega$ mit $\mu(A) = 0$ gibt, sodass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X \setminus A$.

(ii) (f_n) ist **gleichmäßig konvergent f.ü.** gegen f wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

(iii) $(f_n) \subseteq L^p(X, \mu)$ ist **konvergent im p-ten Mittel** gegen f wenn $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Bemerkung. Aus der gleichmäßigen Konvergenz f.ü. folgt offenbar die punktweise Konvergenz.

Beispiel. Die Funktionenfolge $f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion. Sie konvergiert aber nicht im Sinne der p-Norm (gegen die Nullfunktion).

Beispiel. Umgekehrt braucht aus der Konvergenz bzgl. der p-Norm nicht die punktweise Konvergenz zu folgen. Wir suchen dazu eine Folge (E_n) von meßbaren Mengen mit $\mu(E_n) \to 0$, und zwar so, dass für jedes $x \in X$ gilt dass $x \in E_n$ für unendlich viele n und ebenso $x \notin E_n$ für unendlich viele n .

Dann kann (χ_{E_n}) nicht punktweise konvergieren, aber

$$\|\chi_{E_n}\|_p = (\mu(E_n))^{\frac{1}{p}} \to 0 \ .$$

Eine derartige gesuchte Folge von Mengen in $\mathbb{R}$ wäre etwa

$$[0,1]\ ,\ [0,\tfrac{1}{2}]\ ,\ [\tfrac{1}{2},1]\ ,\ [0,\tfrac{1}{4}]\ ,\ [\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}]\ ,\dots$$

Definition. (**Konvergenz im Maß**)

Sei (X,Ω,μ) ein **endlicher** Maßraum. Eine Folge (f_n) von meßbaren Funktionen heißt **μ-stochastisch konvergent** gegen eine meßbare Funktion f wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x\ :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Eine andere Sprechweise: f_n konvergiert im Maß , $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$.

Bemerkung. Wenn $f = g$ f.ü. und $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$, dann gilt auch $f_n \stackrel{\mu}{\to} g$.

Beweis. Offenbar ist

$$\mu(\{x\ :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \mu(\{x\ :\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) \quad \square$$

Bemerkung. Wenn $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$ und $f_n \stackrel{\mu}{\to} g$, dann ist $f = g$ f.ü.

Beweis. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\{x\ :\ |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq$$
$$\{x\ :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x\ :\ |f_n(x) - g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}\ .$$

Mit der Monotonie des Maßes und Grenzübergang $n \to \infty$ folgt

$$\mu(\{x\ :\ |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0\ .$$

Dann gilt aber $f = g$ f.ü. , weil

$$\{x\ :\ f(x) \neq g(x)\} = \{x\ :\ |f(x) - g(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\ :\ |f(x) - g(x)| \geq \tfrac{1}{n}\}$$

Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Damit ist alles gezeigt. $\square$

Bemerkung. Das vorherige Beispiel einer Funktionenfolge, welche nicht punktweise konvergiert, zeigt, dass die Konvergenz im Maß echt schwächer ist als die punktweise Konvergenz f.ü.

Weil $\mu(\{x \ : \ \chi_{E_n}(x) \geq \varepsilon > 0\}) = \mu(E_n) \to 0$, gilt $\chi_{E_n} \stackrel{\mu}{\to} 0$.

Lemma. (**Ungleichung von Tschebyscheff**)

Für jede meßbare Funktion f und für alle reellen Zahlen $p > 0$, $\alpha > 0$ gilt

$$\mu(\{x \ : \ |f(x)| \geq \alpha\}) \leq (\tfrac{1}{\alpha})^p \int_X |f(x)|^p d\mu$$

Beweis.

Sei $A_\alpha = \{x \ : \ |f(x)| \geq \alpha\}$. Dann ist A_α meßbar und

$$\int_X |f(x)|^p d\mu \geq \int_{A_\alpha} |f(x)|^p d\mu \geq \int_{A_\alpha} \alpha^p d\mu = \alpha^p \mu(A_\alpha) \ .$$

Mit Division durch α^p ist alles gezeigt. $\square$

Die folgende Aussage sei ohne Beweis erwähnt.

Lemma. Sei μ ein endliches Maß und (f_n) eine Folge meßbarer Funktionen. Dann gilt $f_n \stackrel{\mu}{\to} 0$ genau dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \ : \ \sup_{m\geq n} |f_m(x)| \geq \alpha\}) = 0 \quad \forall\ \alpha > 0$$

Nun untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den Konvergenzbegriffen.

Satz.

1) Konvergiert $(f_n) \subseteq L^p$ gegen $f \in L^p$ im Sinne der p-Norm, dann gilt $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$.

2) Konvergiert eine Folge (f_n) meßbarer Funktionen punktweise f.ü. gegen eine meßbare Funktion f , dann gilt ebenfalls $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$.

Beweis.

Ad 1) Sei $\varepsilon > 0$. Mit der Ungleichung von Tschebyscheff gilt dann

$\mu(\{x \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p$

Wegen $\|f_n - f\|_p \to 0$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \ .$$

Ad 2) Wegen

$$\{x \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \ : \ \sup_{m\geq n} |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

folgt mit dem vorherigen Lemma die Behauptung. $\square$

Bisher wurde die Konvergenz im Maß nur für endliche Maße definiert. Im Falle eines unendlichen Maßes kann man die Definition folgendermaßen modifizieren.

Definition. (f_n) konvergiert im Maß gegen f wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} \cap A) = 0$$

für alle $\alpha > 0$ und alle $A \in \Omega$ mit $\mu(A) < \infty$.

Der letzte Satz kann dann auch auf diesen Fall eines nicht-endlichen Maßraumes ausgeweitet werden.

Für den ersten Punkt muß nur bemerkt werden, dass die Tschebyscheff Ungleichung auch für $\mu(X) = \infty$ richtig ist.

Für 2. definiert man ein endliches Maß ν durch $\nu(E) = \mu(E \cap A)$ für ein festes $A \in \Omega$ mit $\mu(A) < \infty$ und $E \in \Omega$.

Durch Anwendung des Satzes auf das endliche Maß ν folgt die Behauptung.