Absolute Stetigkeit von Maßen

Wir sahen bereits früher, dass zwei Maße μ und ν auf (X, Ω) mittels einer Dichtefunktion zusammenhängen können, i.e. $\nu(E) = \int_E f d\mu$ für alle $E \in \Omega$. Im folgenden lernen wir einen weiteren Zusammenhang kennen und werden sehen, dass beide Bedingungen unter gewissen Voraussetzungen gleichwertig sind.

Definition. Seien μ und ν Maße auf (X, Ω). Dann heißt ν **absolut stetig** bezüglich μ (kurz $\nu \ll \mu$) , wenn für alle $A \in \Omega$ mit $\mu(A) = 0$ auch gilt dass $\nu(A) = 0$.

Bemerkung. Die absolute Stetigkeit ist also eine Bedingung, welche sich auf Nullmengen bezieht.

Lemma. Sei ν ein **endliches** Maß. Dann ist ν genau dann absolut stetig bezüglich μ wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert sodass

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \nu(A) < \varepsilon \quad \forall\ A \in \Omega$$

Beweis.

Gelte $\nu \ll \mu$ und sei $\varepsilon > 0$. Annahme: es gibt eine Folge $(A_n) \subseteq \Omega$ mit $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ und $\nu(A_n) \geq \varepsilon$.

Sei $A = \limsup A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $A \subseteq \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, folglich $\mu(A) \leq \sum\limits_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Also $\mu(A) = 0$.

Weil ν endlich ist, gilt (siehe früher)

$$\nu(A) = \nu(\limsup A_n) \geq \limsup \nu(A_n) \geq \varepsilon .$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\nu \ll \mu$.

Umgekehrt gelte $\mu(A) = 0$. Dann ist nach Voraussetzung $\nu(A) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Also $\nu(A) = 0$. $\square$

Definition. Sei μ ein Maß auf (X, Ω) und $A \in \Omega$. Dann heißt μ **konzentriert auf** A , wenn $\mu(E) = \mu(A \cap E)$ für alle $E \in \Omega$ gilt.

Zwei Maße λ_1 und λ_2 heißen **zueinander singulär**, wenn es zwei Mengen $A, B \in \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = X$ gibt sodass λ_1 auf A und λ_2 auf B konzentriert sind. Man schreibt $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Bemerkung. μ ist konzentriert auf $A \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \mu(X \setminus A) = 0$.

Definition. Eine Mengenfunktion $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mu : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt ein **signiertes** bzw. **komplexes Maß** , wenn

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad , \ A_n \in \Omega$

Hier muß die Reihe absolut konvergieren. Weiters dürfen komplexe Maße nicht den Wert ∞ annehmen. Signierte Maße dürfen nur einen der beiden Werte $\pm\infty$ annehmen.

Definition.

1. Sei $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ein signiertes Maß. $P \in \Omega$ heißt **positiv** , wenn $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \Omega$ mit $A \subseteq P$ gilt.

2. $N \in \Omega$ heißt **negativ** , wenn $\mu(A) \leq 0$ für alle $A \in \Omega$ mit $A \subseteq N$ gilt.

3. Ist μ ein signiertes oder komplexes Maß, dann heißt $Q \in \Omega$ eine **Nullmenge** , wenn $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \Omega$ mit $A \subseteq Q$ gilt.

Im folgenden sind wir daran interessiert, ein positives Maß λ zu finden, das ein komplexes Maß μ im Sinne von $|\mu(E)| \leq \lambda(E)$ beschränkt. Wir wollen auch, dass λ möglichst klein ist. Jede Lösung dieses Problems (falls überhaupt eine existiert) muß dabei die Bedingung

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

erfüllen, wobei die E_i eine Partition von E bilden.

Definition. Zu einem komplexen Maß μ ist das **Variationsmaß** $|\mu|$ definiert als

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| \ : \ E = \biguplus_{i=1}^{\infty} E_i\}$$

($|\mu|$ heißt auch **Totalvariation** von μ)

Satz. (ohne Beweis)

$|\mu|$ ist tatsächlich ein Maß.

Bemerkung. Ist μ ein signiertes Maß, dann sind durch $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ und $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$ wieder Maße gegeben, wobei $|\mu|$ wie vorher definiert ist.

Es gilt $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Die Maße μ^+ und μ^- heißen die **positive** bzw. **negative Variation** von μ .

Weitere Eigenschaften. (Beweise zur Übung)

Seien λ , λ_1 und λ_2 signierte bzw. komplexe Maße auf Ω und μ ein Maß auf Ω . Dann gilt

1. Wenn λ auf A konzentriert ist, dann auch $|\lambda|$.
2. $\lambda_1 \perp \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$
3. $\lambda_1 \perp \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$
4. $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \ll \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$
5. $\lambda \ll \mu \quad \Rightarrow \quad |\lambda| \ll \mu$
6. $\lambda_1 \ll \mu$ und $\lambda_2 \perp \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \perp \lambda_2$
7. $\lambda \ll \mu$ und $\lambda \perp \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$

Für den Beweis des nachfolgenden Satzes benötigen wir die folgende Charakterisierung der σ-Endlichkeit eines Maßraumes.

Lemma. Ein Maß μ ist genau dann σ-endlich, wenn es eine integrierbare

Funktion h auf X gibt mit $0 < h(x) < \infty$ für alle $x \in X$.

Beweis. Sei μ σ-endlich. Dann ist $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $\mu(A_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Des weiteren gibt es Zahlen $r_n > 0$ mit $r_n \leq \frac{1}{2^n}$ und $\mu(A_n) \cdot r_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Für die Funktion $h = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n \chi_{A_n}$ ergibt sich aus dem Satz über die monotone Konvergenz, dass sie integrierbar ist. Weil die Mengen A_n die Menge X überdecken, gilt $h > 0$.

Zum Beweis der Umkehrung definieren wir Mengen

$$A_n = \{x \in X \ : \ h(x) \geq \tfrac{1}{n}\} \ .$$

Diese bilden wegen $0 < h(x) < \infty$ eine Überdeckung von X .

Wegen $\chi_{A_n} \leq n \cdot h$ gilt $\mu(A_n) \leq n \int_X h d\mu < \infty$. $\square$

Satz. (**Radon-Nikodym**)

Sei μ ein σ-endliches Maß auf (X, Ω) und ν ein endliches Maß auf (X, Ω) mit $\nu \ll \mu$.

Dann gibt es eine (f.ü.) eindeutig bestimmte Funktion $f \in L^1(X, \mu)$ sodass

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \forall \ E \in \Omega \ .$$

Die Funktion f heißt die Radon-Nikodym-Dichte von ν bezüglich μ und man schreibt $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Beweis.

Wir zeigen die Aussage zuerst für ein endliches Maß μ . Dazu betrachten wir die Menge

$$\mathcal{S} = \{f \in L^1(X, \mu) \ : \ \int_E f d\mu \leq \nu(E) \quad \forall \ E \in \Omega\} \ .$$

Auf $\mathcal{S}$ betrachten wir die Partialordnung

$$f \preceq g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \ \text{ fast überall}$$

$\mathcal{S} \neq \emptyset$ weil $f = 0 \in \mathcal{S}$.

Schritt 1. Sei $f \in \mathcal{S}$ und $A \in \Omega$ mit $\int_A f d\mu < \nu(A)$. Wir erwähnen ohne Beweis, dass in diesem Fall ein $g \in \mathcal{S}$ existiert mit $f \preceq g$ und $f \neq g$.

Schritt 2. Wir wollen das Lemma von Zorn anwenden, um die Existenz eines maximalen Elementes in $\mathcal{S}$ nachzuweisen, das dann wegen Schritt 1. die gesuchte Dichte sein muß.

Dazu betrachten wir eine linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{S}$, die wir in der Form $K = \{s_i \ : \ i \in I\} \subseteq \mathcal{S}$ schreiben, wobei die Indexmenge I linear geordnet ist, also $i \leq j \ \Rightarrow \ s_i \preceq s_j$ gilt.

Jedem Element der Kette K ordnen wir die Zahl $\xi_i = \int_X s_i d\mu$ zu. Damit gilt natürlich $i \leq j \ \Rightarrow \xi_i \leq \xi_j$.

Ist die Menge $\{\xi_i \ : \ i \in I\}$ endlich, dann wählen wir ein j mit $\xi_j = \max\{\xi_i \ : \ i \in I\}$ und haben $s_i \preceq s_j$ für alle $i \in I$ und somit eine obere Schranke für die Kette K .

Ist $\{\xi_i \ : \ i \in I\}$ unendlich, dann ist unter den gegebenen Voraussetzungen $\alpha = \sup\{\xi_i \ : \ i \in I\}$ endlich. Wir wählen nun eine monoton wachsende Folge ξ_{i_k} mit $\lim\limits_{k \to \infty} \xi_{i_k} = \alpha$. Die zugehörigen Funktionen s_{i_k} bilden dann ebenfalls eine monoton wachsende Folge bezüglich $\preceq$. Damit existiert der punktweise Grenzwert f.ü. und ist eine meßbare Funktion. Die Grenzfunktion ist eine obere Schranke für die Kette K .

Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathcal{S}$ damit ein maximales Element und der Satz ist für endliche Maße bewiesen.

Sei μ nun ein σ-endliches Maß. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $X_n \in \Omega$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Die vorherige Überlegung für die endlichen Maße $\nu_n = \nu|_{X_n}$ und $\mu_n = \mu|_{X_n}$ liefert entsprechende meßbare Funktionen f_n auf X_n .

Die gesuchte Dichte f erhalten wir dann durch $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, wobei die Integrierbarkeit von f aus der Endlichkeit von ν folgt. $\Box$

Bemerkung. Der Satz ist i.a. falsch, wenn μ nicht σ-endlich ist.

Bemerkung. Gilt $\lambda \ll \nu \ll \mu$ und $g = \frac{d\lambda}{d\nu}$ und $h = \frac{d\nu}{d\mu}$, dann gilt

$\lambda(A) = \int_A g d\nu = \int_A gh d\mu$, also $\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\nu} \cdot \frac{d\nu}{d\mu}$.

Satz. (**Lebesgue-Radon-Nikodym**) (ohne Beweis)

Sei μ ein σ-endliches Maß auf (X, Ω) und λ ein komplexes Maß auf (X, Ω) .

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar von komplexen Maßen λ_a , λ_s auf (X, Ω) mit

$\lambda = \lambda_a + \lambda_s \quad , \quad \lambda_a \ll \mu \quad , \quad \lambda_s \perp \mu$

Weiters gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $h \in L^1(X, \mu)$ sodass

$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu \quad \forall \ E \in \Omega$.

Als Folgerungen aus dem Satz von Radon-Nikodym seien ohne Beweis folgende Aussagen erwähnt.

Satz. Sei μ ein komplexes Maß auf (X, Ω) . Dann gibt es eine meßbare Funktion h mit $|h| = 1$ und

$\mu(E) = \int_E h d|\mu| \quad \forall \ E \in \Omega$.

Satz. (**Hahnscher Zerlegungssatz**)

Sei μ ein signiertes Maß auf (X, Ω) . Dann gibt es zwei Mengen $P, N \in \Omega$ mit $P \cup N = X$ und $P \cap N = \emptyset$ sodass $\mu^+(E) = \mu(E \cap P)$ und $\mu^-(E) = -\mu(E \cap N)$ für alle $E \in \Omega$ gilt.

Die Mengen P und N sind positiv bzw. negativ. Die Zerlegung ist bis auf Nullmengen eindeutig.