Bekanntes aus der Analysis

1) Normierte Räume

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C})$.

Eine Abbildung $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf X, wenn

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in X$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$

Das Paar $(X, \| \ \|)$ heißt **normierter Raum**.

Beispiele.

(a) $X = \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{... euklidische Norm}$$

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{... Maximumsnorm}$$

(b) $X = \mathbb{C}^n$ ist $\mathbb{C}$-Vektorraum.

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2} \quad \text{... euklidische Norm}$$

$$\|z\| = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| \quad \text{... Maximumsnorm}$$

(c) Betrachte $C(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ ist stetig}\}$, wobei X

ein **kompakter** metrischer Raum ist.

$C(X)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mittels

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\ .$$

$C(X)$ ist normierter Raum mittels

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)| \qquad \text{... Maximumsnorm}$$

$$\|f\| = \max_{x \in X}(p(x)\,|f(x)|) \qquad \text{... gewichtete Maximumsnorm}$$

$$(p : X \to \mathbb{R} \quad \text{stetig mit} \quad p(x) > 0 \quad \forall\, x \in X)$$

Bemerkung. Jeder normierte Raum $(X, \|\ \|)$ ist mittels $d(x,y) = \|x-y\|$ in natürlicher Weise ein **metrischer Raum**.

Vollständige normierte Räume heissen **Banachräume**.

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ und $C(X)$ sind Beispiele für Banachräume.

2) Innere-Produkt-Räume

Sei H ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine Abbildung $(\,,\,) : H \times H \to \mathbb{K}$ heißt **inneres Produkt** (bzw. **Skalarprodukt**) auf H, wenn

(i) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $(y,x) = \overline{(x,y)} \quad \forall\, x,y \in H$

(iii) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \quad \forall\, x,y,z \in H$

(iv) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y) \quad \forall\, x,y \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Bemerkungen.

- (x,x) ist immer reell!
- $(0,y) = (x,0) = 0 \quad \forall\, x,y \in H$
- $(x,\lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$
- $(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$
- für festes $y \in H$ ist die Abbildung $\Lambda_y : H \to \mathbb{K}$ mit $\Lambda_y(x) = (x,y)$ ein lineares Funktional.

Schwarzsche Ungleichung.

$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y) \quad \forall\, x,y \in H$

(Gleichheit genau dann, wenn x,y linear abhängig sind)

Folgerung. Sei H ein Innerer-Produkt-Raum. Dann wird mittels $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ eine **Norm** auf H induziert.

Die Schwarzsche Ungleichung nimmt dann die Form $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ an.

H heißt **Hilbertraum** , wenn der mittels des Skalarproduktes definierte normierte Raum vollständig ist.