Lineare Gleichungssysteme

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Weiters seien $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}$.

Dann heißt

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... \ + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... \ + a_{2n}x_n = b_2 \\
&..... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ ... \ + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

ein **lineares Gleichungssystem** mit m Gleichungen und n Unbestimmten x_1 , x_2 , ..., x_n mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n} \\ .. & & & .. \\ .. & & & .. \\ a_{m1} & .. & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ heißt Koeffizientenmatrix.

Damit ergibt sich die einfache Schreibweise $Ax = b$, wobei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Das Gleichungssystem $Ax = b$ heißt **homogen**, wenn $b = 0$, sonst **inhomogen**.

Homogene Gleichungssysteme

Sei also ein (homogenes) Gleichungssystem $Ax = 0$ gegeben. Gesucht sind die Lösungen des Gleichungssystems, d.h. alle Vektoren $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = 0$.

Die Menge $W = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = 0\}$ heißt der **Lösungsraum** des Gleichungsystems $Ax = 0$.

Es gilt: W ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$, und $\dim W = n - \text{rang} A$.

Beweis. Betrachte die lineare Abbildung $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $L_A(x) = Ax$. Dann ist $W = \text{Ker} L_A$ und damit ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$. Wegen $\text{rang} A = \dim \text{Im} L_A$ und der Dimensionsformel gilt : $\dim \mathbb{K}^n = \dim \text{Im} L_A + \dim \text{Ker} L_A$, also $\dim W = n - \text{rang} A$.

Die Aufgabe besteht also nun darin, eine Basis von W zu bestimmen.

Folgende Beobachtung ist sofort einzusehen: Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$ invertierbar. Dann ist $Ax = 0$ genau dann wenn $(SA)x = 0$. Das heißt: die Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $(SA)x = 0$ haben gleiche Lösungsräume.

Folgerung. Entsteht die Matrix B aus der Matrix A durch elementare Zeilenumformungen, dann haben $Ax = 0$ und $Bx = 0$ gleiche Lösungsräume.

Sei also ein homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$ gegeben. Nun führt man die Matrix A durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix B in Zeilenstufenform über.

$$\text{Sei}\quad B = \begin{pmatrix} .. & b_{1j_1} & & & & & & \\ & 0 & .. & b_{2j_2} & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & .. & b_{rj_r} & & \\ & & & & & 0 & .. & 0 \\ & & & & & .. & & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Werden die Unbestimmten x_i mit $i \notin \{j_1, ..., j_r\}$ als frei wählbare Parameter gesetzt, dann können $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$ durch diese Parameter ausgedrückt werden.

Inhomogene Gleichungssysteme

Zu einem inhomogenen Gleichungssystem $Ax = b$ $(b \neq 0)$ sei $X = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = b\}$ der Lösungsraum. Man beachte, daß für $b \neq 0$ der Lösungsraum X **kein** Unterraum von $\mathbb{K}^n$ ist. Offenbar gibt es aber ein zugeordnetes homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann heißt eine Teilmenge $X \subseteq V$ ein **affiner Unterraum** , wenn $\exists\, v \in V$, $\exists\, W \lhd V$ sodaß $X = v+W = \{v+w \ : w \in W\}$. Die leere Menge ist per definition ein affiner Unterraum.

Es gilt für einen affinen Unterraum $X = v + W$:
(1) $\forall\, v' \in X \ : \ X = v' + W$
(2) Ist $X = v+W = v'+W'$, wobei $W, W' \lhd V$, dann ist $W = W'$ und $v-v' \in W$, d.h. der beteiligte Unterraum von X ist eindeutig bestimmmt.

Somit kann sinnvollerweise die **Dimension** eines affinen Unterraums als die Dimension des beteiligten Unterraums definiert werden, i.e. ist $X = v+W$, dann ist $\dim X := \dim W$.

Lemma. Sei $F : V \to V'$ linear. Dann ist $\forall\, w \in V'$ das Urbild $F^{-1}(\{w\})$ ein affiner Unterraum von V . Ist $v \in F^{-1}(\{w\})$, dann ist $F^{-1}(\{w\}) = v + \mathrm{Ker} F$.

Beweis. Sei $X = F^{-1}(\{w\})$. Wenn $X = \emptyset$, sind wir fertig. Ansonsten wähle ein $v \in X$, d.h. $F(v) = w$.
Ist $u \in X$, dann ist $u = v + (u - v)$ und damit $w = F(u) = F(v) + F(u - v) = w + F(u - v)$. Damit ist $F(u - v) = 0$, i.e. $u - v \in \mathrm{Ker} F$ und somit $u \in v + \mathrm{Ker} F$.
Ist $u \in v + \mathrm{Ker} F$, dann existiert ein $v' \in \mathrm{Ker} F$ mit $u = v + v'$. Dann ist $F(u) = F(v) + F(v') = F(v) + 0 = w$, also $u \in X$.
Insgesamt ist also $X = v + \mathrm{Ker} F$.

Folgerung. Betrachte das Gleichungssystem $Ax = b$, und setze $X = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = b\}$ und $W = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = 0\}$. Ist $X \neq \emptyset$ und $v \in X$ beliebig, dann ist $X = v + W$.

Das heißt: Falls existent, erhält man die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems durch Addition einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

. . . .

Bemerkung. Ein homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$ ist immer lösbar, d.h. besitzt eine Lösung, nämlich die triviale Lösung $x = 0$.

Ein inhomogenes Gleichungssystem braucht dagegen nicht immer lösbar zu sein, z.B.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Es stellt sich somit die Frage, wann ein Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist. Dazu betrachtet man die sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A' = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n} & b_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & .. & .. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat offenbar genau dann eine Lösung, wenn $b \in \mathrm{Im} L_A$ ist, wobei L_A die Abbildung $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $L_A(x) = Ax$ ist. $\mathrm{Im} L_A$ wird aufgespannt von den Vektoren $Ae_1, ..., Ae_n$, - dies sind aber genau die Spalten von A . $Ax = b$ ist also lösbar, wenn b im Spaltenraum von A liegt. Das heißt aber nichts anderes, als daß rang $A =$ rang (A, b) .

Satz. Sei $Ax = b$ gegeben. Dann gilt:
$Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ rang $A =$ rang (A, b) .

. . . .

Definition. Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Man sagt, daß A ein universell lösbares Gleichungssystem definiert, wenn $\forall\ b \in \mathbb{K}^m$ das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist.

Dies bedeutet offenbar nichts anderes, als daß die Abbildung L_A surjektiv ist, und damit gilt:

Satz. A liefert ein universell lösbares Gleichungssystem genau dann, wenn rang $A = m$.

. . . .

Eine weitere wichtige Frage betrifft die eindeutige Lösbarkeit von $Ax = b$, d.h. wann gibt es genau ein $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = b$.

Zum einen muß dafür $Ax = b$ natürlich lösbar sein. Sind nun x_1, x_2 Lösungen von $Ax = b$, dann gilt offenbar $A(x_1 - x_2) = 0$, d.h. $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker} L_A$. Somit gilt:

Satz. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} L_A = \{0\}$ und $Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ rang $A =$ rang $A' = n$.