

# Kardinalzahlen

**Definition.** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen **gleichmächtig**,  $|A| = |B|$ , wenn eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  existiert.

Offenbar ist die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation (auf der Klasse aller Mengen).

Jeder solchen Äquivalenzklasse kann ein Symbol zugeordnet werden, die sogenannte **Kardinalzahl**, welche die Mächtigkeit der Mengen in dieser Äquivalenzklasse beschreibt, z.B.  $m = |A|$ .

Die Mächtigkeit einer Menge ist intuitiv die "Anzahl der Elemente der Menge". Ist  $A$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen, dann ist die Kardinalzahl von  $A$  gleich  $n$ .

Des weiteren haben sich die Symbole  $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$  und  $c = |\mathbb{R}|$  etabliert.

Für Kardinalzahlen kann eine **Ordnungsrelation** erklärt werden:

Seien  $m = |A|$  und  $n = |B|$ . Dann gilt  $m \leq n$  wenn es eine injektive Abbildung  $f : A \rightarrow B$  gibt.

**Satz.** (Schröder, Bernstein)

$$m \leq n \text{ und } n \leq m \Rightarrow m = n$$

Des weiteren gilt, daß " $\leq$ " eine lineare Ordnung ist (sogar eine Wohlordnung).

Für Kardinalzahlen kann nun eine ”**Arithmetik**” definiert werden:

Seien  $m = |A|$  und  $n = |B|$  und  $A \cap B = \emptyset$ .

- (i)  $m + n = |A \cup B|$
- (ii)  $m \cdot n = |A \times B|$
- (iii)  $m^n = |\{f : B \rightarrow A\}|$

**Satz.** Ist  $m = |A|$ ,  $n = |B|$  und eine der beiden Mengen unendlich, dann gilt:

$$m + n = m \cdot n = \max\{m, n\}$$

Des weiteren seien folgende wichtige Aussagen angeführt:

- $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c$
- $\forall i \in I$  sei  $|S_i| \leq m$  und sei  $|I| \leq n$ .  
Dann gilt:  $|\bigcup\{S_i : i \in I\}| \leq m \cdot n$
- Für jede Menge  $A$  gilt:  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$  (Cantor)
- Die Kontinuumshypothese (CH) besagt, daß  $c$  der unmittelbare Nachfolger von  $\aleph_0$  ist, d.h. dazwischen gibt es keine weiteren Kardinalzahlen.

K. Gödel zeigte, daß die Kontinuumshypothese konsistent mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre ist. Später bewies P. Cohen, daß die Negation der Kontinuumshypothese ebenfalls konsistent mit den Axiomen der Mengenlehre ist. Damit ist (CH) unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre.