Kompaktheitsbegriffe in metrischen Räumen

Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.

1) $M \subseteq X$ heißt **(abzählbar) kompakt** , wenn jede (abzählbare) offene Überdeckung von M eine endliche Überdeckung enthält.

2) $M \subseteq X$ heißt ε**-kompakt** , wenn : $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists$ endliche Teilmenge $\{a_1, ..., a_k\} \subseteq M$ mit $M \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} K(a_i, \varepsilon)$.

3) $M \subseteq X$ heißt **relativ kompakt** , wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

Satz. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) M ist kompakt,
2) M ist abzählbar kompakt,
3) jede Folge in M hat einen Häufungspunkt in M,
4) jede Folge in M enthält eine in M konvergente Teilfolge,
5) M ist ε-kompakt und vollständig.

Des weiteren gilt:

1) $M \subseteq X$ ist kompakt $\Rightarrow$ M ist abgeschlossen

2) $M \subseteq X$ kompakt, $A \subseteq M$ und A ist abgeschlosssen $\Rightarrow$ A ist kompakt

3) Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann gilt:

(i) $M \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow$ $f(M) \subseteq Y$ ist kompakt

(ii) X kompakt $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig

(iii) X kompakt und $Y = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f nimmt Minimum und Maximum an

(iv) X kompakt und f bijektiv $\Rightarrow$ f^{-1} ist stetig

(Beweis: sei $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow$ A ist kompakt $\Rightarrow$ $f(A)$ ist kompakt $\Rightarrow$ $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ ist abgeschlossen. Damit ist f auch eine offene Abbildung und f^{-1} stetig.)

4) Sei $A \subseteq M \subseteq X$. Dann gilt:

(i) M ist relativ kompakt $\Rightarrow$ A ist relativ kompakt

(ii) M ist ε-kompakt $\Rightarrow$ A ist ε-kompakt

(iii) M ist ε-kompakt (bzw. beschränkt) $\Rightarrow$ $\overline{M}$ ist ε-kompakt (bzw. beschränkt)

5) Für $M \subseteq X$ gilt:

M ist relativ kompakt $\Rightarrow$ M ist ε-kompakt $\Rightarrow$ M ist beschränkt

Ist X darüberhinaus vollständig, dann ist umgekehrt jede ε-

kompakte Teilmenge auch relativ kompakt.

6) $M \subseteq X$ ist relativ kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge in M hat einen Häufungspunkt in X (bzw. enthält eine in X konvergente Teilfolge) .

7) $f : X \to Y$ stetig, $M \subseteq X$ relativ kompakt $\Rightarrow$ $f(M) \subseteq Y$ relativ kompakt

Beweis: $\overline{M}$ ist kompakt, folglich ist $f(\overline{M})$ kompakt und damit abgeschlossen. Wegen $f(M) \subseteq f(\overline{M})$ ist dann $\overline{f(M)} \subseteq f(\overline{M})$. Somit ist $\overline{f(M)}$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge wiederum kompakt.