Lineare Abbildungen und Matrizen

- **Koordinatensysteme**

Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$, und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ sei eine Basis in V . Dann gibt es für jedes $v \in V$ genau ein n-Tupel $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ sodaß $v = x_1 v_1 + ... x_n v_n$.

Die zugehörige Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ mit $\Phi_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = x_1 v_1 + ... x_n v_n$ ist ein Isomorphismus, und heißt auch Koordinatensystem in V .
Zu $v \in V$ heißt $x = (x_1, ..., x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$.

- Wir betrachten nun die folgende Grundsituation:

V und W sind K-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$.
$\mathcal{A} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis von V , $\mathcal{B} = (w_1, w_2, ..., w_m)$ ist eine Basis von W .

1. Die einer Matrix zugeordnete lineare Abbildung

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $F : V \to W$ mit

$F(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m$
$F(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m$
.....
$F(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m$

D.h. der Koordinatenvektor von $F(v_j)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ ist die j-te Spalte von A .

Man schreibt auch $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) = F$.
Auf diese Weise wird eine Abbildung $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : M(m \times n; K) \to Hom_K(V, W)$ definiert, wobei $A \mapsto L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)$.

Spezialfall. Sei $V = K^n$, $W = K^m$ und $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$ seien die kanonischen Basen in K^n bzw. K^m . Werden $x \in K^n$ und $y = F(x) = L^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'}(A)(x) \in K^m$ als Spaltenvektoren geschrieben, dann können x bzw. y als $n \times 1$ bzw. $m \times 1$ Matrizen aufgefaßt werden und es gilt $y = Ax$, d.h. y ist das Produkt der Matrizen A und x .

Wir betrachten nun die durch die Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ definierten Koordinatensysteme $\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to V$ und $\Phi_{\mathcal{B}} : K^m \to W$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'}(A)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)"'] & W \end{tikzcd}$$

d.h. $\Phi_{\mathcal{B}} \circ L^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'}(A) = L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ bzw. $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A) = \Phi_{\mathcal{B}} \circ L^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'}(A) \circ (\Phi_{\mathcal{A}})^{-1}$.

Mit anderen Worten: Ist x der Koordinatenvektor (bzgl. $\mathcal{A}$) von einem Vektor $v \in V$, dann ist $y = Ax$ der Koordinatenvektor (bzgl. $\mathcal{B}$) vom Bildvektor $L^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(A)(v)$.

2. Die einer linearen Abbildung zugeordnete Matrix

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ gibt es dann eindeutig bestimmte Skalare $\{a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}\}$ sodaß $F(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + ... + a_{mj}w_m$.

Auf diese Weise erhält man eine $m \times n$ Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = (a_{ij})$, die sog. darstellende Matrix von F bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, sowie eine Abbildung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Hom_K(V, W) \to M(m \times n; K)$ wobei $F \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$.

Bemerkung 1. Die j-te Spalte von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ ist der Koordinatenvektor von $F(v_j)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

Bemerkung 2. Ist x der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. $\mathcal{A}$, y der Koordinatenvektor von $F(v) \in W$ bzgl. $\mathcal{B}$, $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ dann gilt $y = Ax$. Das heißt, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{K}}(A)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "F"'] & W \end{tikzcd}$$

3. Der Isomorphismus

SATZ. Die Abbildung $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : M(m \times n; K) \to Hom_K(V, W)$ ist ein Isomorphismus, dessen Umkehrabbildung durch $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : Hom_K(V, W) \to M(m \times n; K)$ gegeben ist.

Das heißt unter anderem auch: Ist A eine $m \times n$ Matrix, dann ist A die darstellende Matrix von $L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$. Ist $F \in Hom_K(V, W)$ und $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$, dann ist $F = L_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A)$.

4. Komposition von linearen Abbildungen

Nun seien V, V', V'' K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ gegeben, und $\dim V = n$, $\dim V' = m$, $\dim V'' = r$.
Weiters seien $F : V \to V'$ und $G : V' \to V''$ lineare Abbildungen. Setze

$H = G \circ F$, und $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$, $B = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(G)$.

Dann gilt: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(H) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(G \circ F) = BA = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(G) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$.

Analog zeigt man für $A \in M(m \times n; K)$, $B \in M(r \times m; K)$:
$L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(BA) = L^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(B) \circ L^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(A)$.