Lineare Abbildungen

Definition. Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume (über ein- und demselben Körper $\mathbb{K}$).
Eine Abbildung $F : V \to W$ heißt $\mathbb{K}$-linear (bzw. linear), wenn

(L1) $F(v + w) = F(v) + F(w) \quad \forall\, v, w \in V$

(L2) $F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall\, v \in V\ ,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\ .$

D.h. die Abbildung F ist mit den Vektorraumstrukturen "verträglich".

Bemerkung 1. Die Eigenschaften (L1) und (L2) sind äquivalent zur Eigenschaft

(L) $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \quad \forall\, v, w \in V\ ,\ \forall\, \lambda\ , \mu \in \mathbb{K}\ .$

D.h. eine lineare Abbildung führt eine Linearkombination von zwei Vektoren in V in die entsprechende Linearkombination der Bildvektoren über.

Bemerkung 2. Sei $F : V \to W$ $\mathbb{K}$-linear. Mittels vollständiger Induktion folgt sofort, daß

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + ... + \lambda_n F(v_n)$$

für alle $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ gilt.

Grundlegende Eigenschaften.

Sei $F : V \to W$ linear. Dann gilt:

1) $F(0) = 0$ und $F(v - w) = F(v) - F(w)$ für $v, w \in V$.

2) Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .
   i) $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig $\Rightarrow$ $(F(v_i))_{i \in I}$ linear abhängig (in W)
   ii) $F((v_i))_{i \in I}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

3) i) $V' \triangleleft V \quad \Rightarrow \quad F(V') \triangleleft W$
   ii) $W' \triangleleft W \quad \Rightarrow \quad F^{-1}(W') \triangleleft V$

4) $\dim F(V) \leq \dim V$.

Beispiele für lineare Abbildungen.

1) Die Nullabbildung $F : V \to W$ mit $F(v) = 0 \quad \forall\, v \in V$, sowie die identische Abbildung $id = F : V \to V$ mit $F(v) = v \quad \forall\, v \in V$ sind lineare Abbildungen.

2) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $F(v) = \lambda v$ linear.

3) Für $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{K}^n$ sei

$$< v, w >= \sum_{j=1}^{n} v_j w_j = v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... + v_n w_n \ .$$

Dann gilt:

i) $< v, w >=< w, v >$,

ii) $< v + v', w >=< v, w > + < v', w >$,

iii) $< v, 0 >= 0$,

iv) $< \lambda v, w >= \lambda < v, w >$.

Im besonderen ist damit für ein festes $w \in \mathbb{K}^n$ die Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ mit $F(v) =< v, w >$ eine lineare Abbildung.

4) Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix mit Elementen aus $\mathbb{K}$. Dann definiert A in natürlicher Weise eine Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

Für $v = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ setze

$$F(v) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \ , ..., \ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j) = (< a_1, v >, < a_2, v >, ..., < a_m, v >) \ .$$

Dabei bezeichnen $a_1, a_2, ..., a_m$ die Zeilen von A.

Die i-te Komponente von $F(v)$ ist also $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Man sieht sofort, daß F eine lineare Abbildung ist.

Wir werden später sehen, daß jede lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ genau diese Form besitzt, d.h. durch eine $m \times n$ Matrix A definiert ist.

5) Sei X eine beliebige Menge, V=Abb$(X, \mathbb{R})$ und $\varphi : X \to X$ eine beliebige Abbildung.

Dann ist $F : V \to V$ mit $F(f) = f \circ \varphi$ eine lineare Abbildung.

6) Die Abbildung $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to$Abb$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f \mapsto f'$ ist linear.
Des weiteren ist für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung Abb$(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f \mapsto f(x_0)$ linear.