Maß- und Integrationstheorie

Definition. Es sei X eine Menge. Ω heißt eine **σ-Algebra** auf X, wenn Ω eine Familie von Teilmengen von X ist mit folgenden Eigenschaften:

1) $X \in \Omega$,
2) $E \in \Omega \quad \Rightarrow \quad X \setminus E \in \Omega$,
3) $E_n \in \Omega \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Omega$ $\quad$ (σ-Additivität)

Das Paar (X, Ω) heißt dann **Meßraum** und die Elemente von Ω **meßbare Mengen** bzgl. (X, Ω).

Einfache Beispiele.
1) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra auf X.
2) Sei X eine überabzählbare Menge. Dann ist
$\Omega = \{E \subseteq X \; : \; E \;\text{ oder } X \setminus E \;\text{ ist abzählbar}\}$
eine σ-Algebra auf X mit $\Omega \neq \mathcal{P}(X)$.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X. Weil der beliebige Durchschnitt von σ-Algebren wieder eine σ-Algebra ist, gibt es somit eine kleinste σ-Algebra Ω , welche alle Mengen von $\mathcal{A}$ enthält. Ω heißt dann **die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra**.

Beispiel. Unter einem Intervall I des $\mathbb{R}^n$ verstehen wir das kartesische Produkt von n Intervallen aus $\mathbb{R}$. Diese können offen, einseitig offen, abgeschlossen, beschränkt, unbeschränkt, zu einem Punkt entartet oder leer sein.
Ist $\mathcal{A}$ die Familie aller beschränkten Intervalle des $\mathbb{R}^n$, dann heißt die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der **Borel-**

Mengen des $\mathbb{R}^n$.

Man kann zeigen, daß $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ genau jene σ-Algebra ist, die von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird.

Für beliebige metrische Räume (X, d) wird mit $\mathcal{B}(X)$ die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{B}(X)$ sind die **Borel-Mengen** von (X, d) .

Definition. Ein **Maßraum** ist ein Tripel (X, Ω, μ) , wobei X eine Menge, Ω eine σ-Algebra auf X und μ ein nichtnegatives, σ-additives **Maß** auf (X, Ω) ist, d.h. eine Abbildung $\mu : \Omega \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

1) $\mu(E) \geq 0 \quad \forall\, E \in \Omega$ (der Wert ∞ ist möglich)

2) ist $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter meßbarer Mengen, dann ist $\mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

Bemerkung. Gilt $\mu(E) = 0$ für $E \in \Omega$, dann heißt E eine **Nullmenge**.

Beispiel. Sei X eine Menge und $\Omega = \mathcal{P}(X)$. Für $A \subseteq X$ sei $\mu(A)$ die Anzahl der Elemente von A, wenn A endlich ist, und sonst $\mu(A) = \infty$. μ heißt das **Zählmaß** auf X.

Beispiel. Für ein beschränktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $m(I)$ das Volumen von I. Man kann zeigen, daß es genau eine Fortsetzung μ von m auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gibt, sodaß die Eigenschaften 1) und 2) erfüllt sind. μ heißt das **Borel-Lebesguesche Maß**.
Man beachte, daß $\mu(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, und damit

ist jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge (bzgl. des Borel-Lebesgueschen Maßes).

Vervollständigung von Maßräumen. Für vielerlei Zwecke ist es erforderlich, einen gegebenen Maßraum (X, Ω, μ) zu vervollständigen, d.h. zu Ω werden alle Untermengen von Nullmengen hinzugefügt. Dadurch entsteht eine größere σ-Algebra $\overline{\Omega}$, und man sieht, daß das Maß μ eindeutig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden kann. Der so entstehende Maßraum $(X, \overline{\Omega}, \overline{\mu})$ hat die wichtige Eigenschaft, daß jede Untermenge einer Nullmenge wieder meßbar ist und das Maß Null hat.

Aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ entsteht auf diese Weise die σ-Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ der **Lebesgue-meßbaren Mengen** des $\mathbb{R}^n$. Die Fortsetzung des Borel-Lebesgueschen Maßes heißt das **Lebesgue Maß** im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. In der Analysis wird der Begriff des **Jordan-Maßes** für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eingeführt, welcher in weiterer Folge zum Begriff des **Riemann-Integrals** führt. Es gilt, daß jede Jordan-meßbare Menge auch Lebesgue-meßbar ist und die beiden Werte für das Maß übereinstimmen.

Definition. (Die Sprechweise "fast überall")
Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum. Eine Eigenschaft P, die sich auf Punkte $x \in X$ bezieht, gilt "fast überall" (f.ü.), wenn für die Ausnahmemenge gilt: $\mu(\{x \in X \ : \ x \notin P\}) = 0$.

So kann etwa eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ fast überall positiv sein, oder eine Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : X \to [0, \infty]$ fast überall gegen eine Funktion $f : X \to [0, \infty]$ konvergieren, wenn eben die Menge $\{x \in X \; : \; f_n(t)$ konvergiert nicht gegen $f(t)\}$ eine Nullmenge ist.

. . . .

Definition. Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum. Wir betrachten im folgenden Funktionen $f : X \to [-\infty, \infty]$ bzw. $f : X \to \mathbb{C}$.

Die Funktion f heißt **μ-meßbar**, wenn für jede offene Menge $V \subseteq [0, \infty]$ bzw. $V \subseteq \mathbb{C}$ gilt: $f^{-1}(V) \in \Omega$.

(Gleichwertig damit ist die Forderung, daß das Urbild jeder Borel-Menge meßbar ist.)

Bemerkung. Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ spricht man dementsprechend dann von **Borel-meßbaren** und **Lebesgue-meßbaren** Funktionen.
(Stückweise) stetige Funktionen sind Borel-meßbar und damit auch Lebesgue-meßbar.

Wichtig für die Integrationstheorie sind nun die **einfachen Funktionen** (bzw. verallgemeinerten Treppenfunktionen).

Eine Funktion $s(x)$ heißt **einfach**, wenn es endlich viele disjunkte Mengen $E_1, E_2, ..., E_k \in \Omega$ und endlich viele (komplexe) Zahlen $r_1, r_2, ..., r_k$ gibt, sodaß $s(x) = r_j$ für $x \in E_j$ und $s(x) = 0$ sonst ist. Man beachte, daß die Summe und Differenz von einfachen Funktionen wieder eine einfache Funktion ist.

Die einfache Funktion $s(x)$ heisst **μ-integrierbar**, wenn

$\sum\limits_{j=1}^{k} |r_j|\mu(E_j) < \infty$, und das Integral von $s(x)$ ist per definition $\int\limits_X s(x)dx = \sum\limits_{j=1}^{k} r_j\mu(E_j)$.

Damit ist das Integral von einfachen Funktionen definiert. Ist nun $f(x)$ eine beliebige meßbare Funktion, dann heißt $f(x)$ **μ-integrierbar**, wenn eine Folge $f_n(x)$ von einfachen Funktionen existiert, sodaß

1) $f_n(x) \to f(x)$ fast überall, und

2) $\lim\limits_{n,k\to\infty} \int\limits_X |f_n(x) - f_k(x)|dx = 0$.

Man kann nun zeigen, daß der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)dx$ existiert und endlich ist, und dieser Wert unabhängig von der Approximationsfolge für $f(x)$ ist.

Man setzt per definition $\int\limits_X f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)dx$.

Das so definierte Integral hat die üblichen Eigenschaften:

1) $f(x)$ ist μ-integrierbar $\Leftrightarrow$ $|f(x)|$ ist μ-integrierbar.

2) Sind $f(x), g(x)$ μ-integrierbar, dann auch $\alpha f(x)+\beta g(x)$, und es gilt

$$\int\limits_X (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_X f(x)dx + \beta \int\limits_X g(x)dx .$$

3) Ist $f(x)$ μ-integrierbar mit $f(x) \geq 0$ fast überall, dann gilt

$\int\limits_X f(x)dx \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $f(x) = 0$ fast überall ist.

4) $|\int\limits_X f(x)dx| \leq \int\limits_x |f(x)|dx$.

5) Ist $E \in \Omega$, dann ist $\mu(E) = \int\limits_X \chi_E(x)dx$. Des weiteren kann das "Integral über E" durch $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_X \chi_E(x)f(x)dx$ definiert werden.

Bemerkung. Die hier angeführte Integralkonstruktion liefert für Lebesgue-meßbare Funktionen das sogenannte **Lebesgue-Integral**. Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ kann man zeigen, daß für (stückweise) stetige Funktionen das Lebesgue-Integral mit dem Riemann-Integral übereinstimmt.

. . . .

Sei (X, Ω, μ) ein Maßraum. Wir betrachten meßbare Funktionen $f : X \to [-\infty, \infty]$ bzw. $f : X \to \mathbb{C}$. Sei weiters $p \in \mathbb{R}$ mit $p \geq 1$.

Die p-**Norm** von f ist per definition $\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p \, dx\right)^{1/p}$.

Man beachte, daß $\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$ fast überall.

Satz. 1) (**Höldersche Ungleichung**) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dann gilt $\int\limits_X |fg|dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.

2) (**Minkowski Ungleichung**) Sei $p \geq 1$.
Dann gilt $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Definition. $L^p(X) = \{f \ : \ f$ ist messbar und $\int\limits_X |f|^p dx < \infty\}$, wobei Funktionen identifiziert werden, die fast überall gleich sind.

Dann ist $L^p(X)$ ein Vektorraum, $\|f\|_p$ ist eine Norm auf $L^p(X)$, wodurch $L^p(X)$ ein Banachraum wird.

Folgerung. Aus der Hölderschen Ungleichung mit $p = q = 2$ folgt, daß für $f, g \in L^2(X)$ gilt: fg ist integrierbar.

Damit kann auf $L^2(X)$ mittels $< f, g >= \int\limits_X f\overline{g}dx$ ein Skalarprodukt definiert werden, welches die Norm $\| \ \|_2$ liefert, womit $L^2(X)$ also ein Hilbertraum wird.

. . . .

Ein Spezialfall. Sei $X = \mathbb{N}$, $\Omega = \mathcal{P}(X)$ und μ das Zählmaß.

Meßbare Funktionen auf X sind damit Folgen (ξ_k) von rellen bzw. komplexen Zahlen.

Es gilt: $\int\limits_X |f|^p dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$.

Statt $L^p(X)$ schreibt man hier l^p .

Die Höldersche Ungleichung bzw. Minkowski Ungleichung schreiben sich dann in folgenden Formen:

1) $$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{1/q} \quad \left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1\right)$$

2) $$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{1/p}$$