Matrizen I

Definition. Ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & & & & .. \\ .. & & & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ein Körper) heißt **Matrix** bzw. eine $m \times n$ Matrix (mit Elementen aus $\mathbb{K}$).

Die Elemente a_{ij} einer Matrix heißen auch **Komponenten** der Matrix.

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ heißt

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$$

die ***i*-te Zeile** von A bzw. der ***i*-te Zeilenvektor** von A.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ heißt

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ .. \\ .. \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die ***j*-te Spalte** von A bzw. der ***j*-te Spaltenvektor** von A.

- Eine $m \times n$ Matrix A hat also m Zeilen und n Spalten.
- Jede Zeile a_i einer $m \times n$ Matrix A kann als Element von $\mathbb{K}^n$ aufgefaßt werden!
- Jede Spalte a^j einer $m \times n$ Matrix A kann als Element von $\mathbb{K}^m$ aufgefaßt werden!

. . . .

Definition. Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix.

A heißt **quadratisch**, wenn $m = n$. Die Elemente $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ bilden dann die **Diagonalelemente** (bzw. **Hauptdiagonale**) von A.

Gilt weiters $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (bzw. $i < j$) , dann heißt die (quadratische) Matrix A eine **obere** (bzw. **untere**) **Dreiecksmatrix**.

A heißt **Diagonalmatrix** wenn A quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Elementare Zeilenumformungen

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix. Wir betrachten Umformungen von A der folgenden Typen:

I. Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & * & & \\ & & * & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & * & & \\ & & * & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \dots & \lambda a_{in} \\ & & * & & \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

II. Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile :

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & \dots & a_{in} + a_{jn} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

III. Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile, $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

IV. Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile :

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Die Umformungen III. und IV. ergeben sich durch wiederholte Anwendungen der Umformungen I. und II. .

$$III.: \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ \lambda a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i + \lambda a_j \\ * \\ \lambda a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i + \lambda a_j \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix}$$

$$IV.: \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ -a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_i - a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i - (a_i - a_j) \\ * \\ a_i - a_j \\ * \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} * \\ a_j \\ * \\ a_i - a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_j \\ * \\ a_i \\ * \end{pmatrix}$$