Summierbarkeit in Banachräumen

Vorbemerkung. Seien X und I beliebige Mengen. Eine Abbildung $f : I \to X$ mit $f(i) = x_i$ für alle $i \in I$ definiert eine (indizierte) Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen von X . Umgekehrt entspricht jeder (indizierten) Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen von X eine Abbildung $f : I \to X$.

Summierbarkeit in normierten Räumen bzw. Banachräumen

Für einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, \|\ \|)$ ist die Summe von endlich vielen Vektoren von X stets erklärt. Wir wollen nun einen sinnvollen Begriff für die Summe einer (beliebigen) Familie von Vektoren definieren. Im folgenden wird stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sein.

Definition. Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von X .

1) $(x_i)_{i\in I}$ heißt **summierbar** zur Summe $x \in X$, kurz $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$, wenn
zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ existiert sodaß für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ mit $E \supseteq E_0$ gilt : $\|x - \sum\limits_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$.

2) $(x_i)_{i\in I}$ heißt **absolut summierbar** wenn $(\|x_i\|)_{i\in I}$ summierbar in $\mathbb{R}$ ist.

Satz. Sei $(x_i)_{i\in I}$ summierbar zur Summe $x \in X$. Dann ist $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle eine endliche Teilmenge $E_n \subseteq I$ sodaß für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ mit $E \supseteq E_n$ gilt : $\|x - \sum\limits_{i\in E} x_i\| < \frac{1}{2n}$. Die Menge $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ ist dann abzählbar.
Sei nun $j \in I \setminus F$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\|x_j\| = \|\sum_{i\in E_n\cup\{j\}} x_i - \sum_{i\in E_n} x_i\| \leq \|\sum_{i\in E_n\cup\{j\}} x_i - x\| + \|x - \sum_{i\in E_n} x_i\| \leq \frac{1}{n} ,$$

woraus $\|x_j\| = 0$ bzw. $x_j = 0$ folgt. $\square$

Satz. (Cauchy-Kriterium)
Sei $(X, \| \, \|)$ ein Banachraum und $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen von X . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $(x_i)_{i\in I}$ ist summierbar.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $E_0 \subseteq I$ sodaß für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ mit $E \cap E_0 = \emptyset$ gilt : $\|\sum\limits_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$.

Folgerung. Sei $(X, \| \, \|)$ ein Banachraum. Für $(x_i)_{i\in I}$ gilt :
1) $(x_i)_{i\in I}$ ist absolut summierbar $\Rightarrow$ $(x_i)_{i\in I}$ ist summierbar
2) $(x_i)_{i\in I}$ ist summierbar $\Rightarrow$ $(x_i)_{i\in I_1}$ ist summierbar für jede Teilmenge $I_1 \subseteq I$.

Beweis. Sei J wiederum die Menge der endlichen Teilmengen von I und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $E_0 \in J$ sodaß für alle $E \in J$ mit $E \cap E_0 = \emptyset$ gilt : $|\sum\limits_{i\in E} \|x_i\|| < \varepsilon$

(bzw. $\|\sum_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$ für (2)) . Es folgt dann $\|\sum_{i\in E} x_i\| \leq \sum_{i\in E} \|x_i\| < \varepsilon$, also die Summierbarkeit von $(x_i)_{i\in I}$.
Für (2) sei J_1 die Menge der endlichen Teilmengen von I_1 . Wegen $E_0 \cap I_1 \in J_1$ und $E \cap E_0 = \emptyset$ für jedes $E \in J_1$ mit $E \cap (E_0 \cap I_1) = \emptyset$ gilt auch $\|\sum_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$, und damit die Summierbarkeit von $(x_i)_{i\in I_1}$. $\square$

Bemerkung. Ohne Beweis seien vermerkt, daß die Implikation in (1) im allgemeinen nicht umkehrbar ist. Für $X = \mathbb{C}$ folgt allerdings aus der Summierbarkeit von $(x_i)_{i\in I}$ die absolute Summierbarkeit !

Satz 4. Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter Raum, $\sum_{i\in I} x_i = x$ und $\sigma : I \to I$ bijektiv.
Dann ist $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ summierbar und $\sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$.

Beweis. Sei J die Menge der endlichen Teilmengen von I und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $E_0 \in J$ sodaß für alle $E \in J$ mit $E \supseteq E_0$ gilt : $\|x - \sum_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$. Dann ist $\sigma^{-1}(E_0) \in J$, und für alle $F \in J$, $F \supset \sigma^{-1}(E_0)$ folgt

$$\|\sum_{i\in F} x_{\sigma(i)} - x\| = \|\sum_{s\in\sigma(F)} x_s - x\| < \varepsilon \ . \ \square$$

Der Beweis der folgenden Aussage sei dem Leser überlassen.

Satz. Sei $(X, \|\ \|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\sum_{i\in I} x_i = x$,

$\sum_{i \in I} y_i = y$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
Dann gilt : $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = x + y$ und $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda x$.

Unter Verwendung des Cauchy-Kriteriums läßt sich folgende Aussage leicht nachweisen.

Satz. Sei $(H, < >)$ ein Hilbertraum, und $(u_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise orthogonaler Vektoren.
Dann gilt:
$(u_i)_{i \in I}$ ist summierbar (in H) $\Leftrightarrow$ $(\|u_i\|^2)_{i \in I}$ ist summierbar (in $\mathbb{R}$).

. . . .

Summierbarkeit in $\mathbb{R}$.

Vereinbarung: Für die Indexmenge I sei J die Menge der endlichen Teilmengen von I .

Satz. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie reeller Zahlen mit $x_i \geq 0 \ \forall\, i \in I$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) $(x_i)_{i \in I}$ ist summierbar.
(2) $\exists\, a \in \mathbb{R}$ sodaß $\forall\, E \in J$: $\sum_{i \in E} x_i \leq a$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) : Sei $\sum_{i \in I} x_i = x$. Setze $a := x$. Aus der Definition von $\sum_{i \in I} x_i$ folgt sofort, daß $\sum_{i \in E} x_i \leq a$ für alle $E \in J$ ist.
(2) $\Rightarrow$ (1) : Wegen (2) existiert $x = \sup\{ \sum_{i \in E} x_i \ : \ E \in J \}$.

Man sieht sofort, daß $\sum\limits_{i \in I} x_i = x$ ist. $\square$

Bemerkung. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie reeller Zahlen mit $x_i \geq 0$ für alle $i \in I$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(i) = x_i \ \forall\, i \in I$, und μ das Zählmaß auf I . Dann gilt offenbar :

$$\int\limits_I f \, d\mu = \sum_{i \in I} x_i$$

Bemerkung. Seien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$ Familien nichtnegativer reeller Zahlen, und gelte $x_i \leq y_i \ \forall\, i \in I$. Falls $(y_i)_{i \in I}$ summierbar ist, gilt offenbar $\sum\limits_{i \in I} x_i \leq \sum\limits_{i \in I} y_i$.

Mit bekannten Überlegungen aus der Maßtheorie kann schließlich folgende wichtige Verallgemeinerung gezeigt werden:

Satz. Sei A eine Menge und $f : A \to \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$. Sei wiederum
$f(\alpha) = x_\alpha \ \forall\, \alpha \in A$, und μ das Zählmaß auf A . Dann gilt :

$$f \text{ summierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ integrierbar (über } A) .$$

In diesem Fall ist dann $\int\limits_A f \, d\mu = \sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Der Hilbertraum $l^2(A)$

Sei nun A eine beliebige Menge und μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(A)$.

Wie bereits erwähnt, ist dann der zugehörige Raum $L^2(A)$ ein Hilbertraum und wird mit $l^2(A)$ bezeichnet.

$$l^2(A) = \{x : A \to \mathbb{K} \ : \ \int\limits_A |x|^2 \, d\mu < \infty\} \ .$$

Mit $x_\alpha = x(\alpha)$ für alle $\alpha \in A$ ergibt sich $\int\limits_A |x|^2 \, d\mu = \sum\limits_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2$ und damit

$$l^2(A) = \{x : A \to \mathbb{K} \ : \ \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 < \infty\} \ .$$

Das Skalarprodukt im $l^2(A)$ ist gegeben durch

$$< x, y >= (x, y) = \int\limits_A x\overline{y} d\mu = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}$$

Im speziellen ergibt sich

- für $A = \{1, 2, ..., n\}$ der übliche Raum $l^2(A) = \mathbb{K}^n$,
- und für $A = \mathbb{N}$ der Raum aller (reellen bzw. komplexen) Folgen
  $l^2(A) = l^2 = \{x = (\xi_k) \ : \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty\}$.