Topologische Räume

Definition. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, τ) bestehend aus einer Menge X und einer Familie τ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(TR 1) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$,

(TR 2) $O_1, O_2 \in \tau \;\Rightarrow\; O_1 \cap O_2 \in \tau$,

(TR 3) $O_i \in \tau \;\; \forall\, i \in I \;\Rightarrow\; \bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \tau$.

Die Elemente von X heißen auch **Punkte** des Raumes, die Elemente von τ heißen die **offenen Mengen** des Raumes (X, τ), die Familie τ selbst heißt **Topologie** (auf X).

Mit anderen Worten:

(1) $\emptyset$ und X sind stets offen,

(2) der Durchschnitt von zwei (und damit endlich vielen) offenen Mengen ist offen,

(3) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** (bzgl. (X, τ)), wenn $X \setminus A \in \tau$.

Aus den Regeln von de Morgan folgt nun sofort:

(1) $\emptyset$ und X sind stets abgeschlossen,

(2) die Vereinigung von zwei (und damit endlich vielen) abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen,

(3) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Ein zentraler Begriff in der Topologie ist der Begriff der **"Umgebung"**.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** des Punktes $x \in X$ (bzw. der Teilmenge $A \subseteq X$) wenn eine offene Menge $O \subseteq X$ existiert sodaß $x \in O \subseteq U$ (bzw. $A \subseteq O \subseteq U$).

Die Menge aller Umgebungen von $x \in X$ wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

Ist U zusätzlich eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge, spricht man von **offener Umgebung** (bzw. **abgeschlossener Umgebung**).

Ist etwa (X, d) ein metrischer Raum, dann ist $U \subseteq X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$ wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert sodaß $K(x, \varepsilon) \subseteq U$.

Ist O eine offene Menge in (X, τ), dann ist O offenbar eine Umgebung von jedem $x \in O$.
Sei nun $G \subseteq X$ eine Teilmenge, welche Umgebung jedes ihrer

Punkte ist. Für jedes $x \in G$ existiert dann eine offene Menge O_x mit $x \in O_x \subseteq G$. Folglich gilt dann $G = \bigcup_{x \in G} O_x$ und nach (TR 3) ist dann G eine offene Menge. Damit

Satz. Eine Teilmenge $O \subseteq X$ ist genau dann offen in (X, τ) wenn O Umgebung jedes ihrer Punkte ist.
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn zu jedem Punkt $x \notin A$ eine Umgebung U_x von x existiert, sodaß $U_x \cap A = \emptyset$.

. . . .

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge.

$x \in X$ heißt **Berührungspunkt von** A, wenn für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt : $U \cap A \neq \emptyset$.

Die Menge der Berührungspunkte von A wird mit $\overline{A}$ bezeichnet und heißt die **abgeschlossene Hülle** von A.

Satz. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche A umfasst.

Des weiteren gilt:

- A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$
- $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subseteq \overline{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Satz. Ist O offen und $O \cap A = \emptyset$, dann ist $O \cap \overline{A} = \emptyset$.
Im speziellen, sind U und V disjunkte offene Mengen, dann gilt

$U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \emptyset$.

Beweis. Sei also O offen und $O \cap A = \emptyset$. Dann ist $A \subseteq X \setminus O$ und $X \setminus O$ ist abgeschlossen. Weil $\overline{A}$ die kleinste, A umfassende abgeschlossene Menge ist, gilt damit auch $\overline{A} \subseteq X \setminus O$ und folglich $O \cap \overline{A} = \emptyset$.

$x \in X$ heißt **innerer Punkt von** A, wenn es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt mit $U \subseteq A$.

Die Menge der inneren Punkte von A wird mit $\mathrm{int}A$ bezeichnet und heißt das **Innere** von A.

Satz. $\mathrm{int}A$ ist die größte offene Menge, welche in A enthalten ist.

Des weiteren gilt:

- A ist offen $\Leftrightarrow$ $A = \mathrm{int}A$
- $\mathrm{int}X = X$, $\mathrm{int}A \subseteq A$, $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}B$
- $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$

Der Zusammenhang zwischen abgeschlossener Hülle und Innerem wird durch folgende Beobachtung ausgedrückt.

Satz. 1) $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$,
2) $X \setminus \mathrm{int}A = \overline{X \setminus A}$.