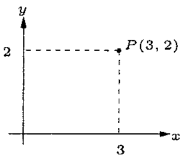
03. Vektoren im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^n$

Unter Verwendung eines Koordinatensystems kann jedem Punkt der Ebene umkehrbar eindeutig ein Zahlenpaar (x, y) zugeordnet werden

$$P \quad \leftrightarrow \quad (x, y)$$

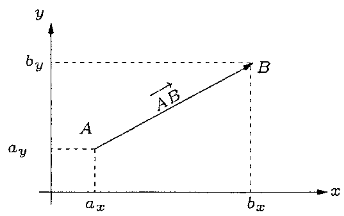
Man nennt x und y die **kartesischen Koordinaten** des Punktes P , und schreibt $P(x, y)$.



Definition. Unter einem **Vektor** $\vec{x}$ in der Ebene versteht man ein Zahlenpaar $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

x, y sind die **Koordinaten** (oder **Komponenten**) des Vektors $\vec{x}$. Die Menge all dieser Vektoren wird mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Definition. Unter einem **Pfeil** $\overrightarrow{AB}$ in der Ebene versteht man ein Paar (A, B) von verschiedenen Punkten der Ebene, die durch eine Strecke verbunden sind. Dabei ist A der Fußpunkt des Pfeiles und B die Spitze des Pfeiles. Der Pfeil geht also von A nach B .

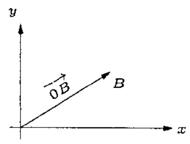


Man beachte dabei, dass $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$!

Ein Pfeil $\overrightarrow{AB}$ mit $A = (a_x, a_y)$ und $B = (b_x, b_y)$ stellt genau dann einen Vektor $\vec{v}$ dar, wenn die Koordinaten von $\vec{v}$ gleich der Differenz der Koordinaten von A und B sind.

Es gibt beliebig viele Pfeile, die ein und deselben Vektor darstellen. Sie sind alle gleich lang, parallel und weisen in dieselbe Richtung.

Definition. Ein Pfeil $\overrightarrow{OB}$, dessen Fußpunkt im Ursprung O des Koordinatensystems liegt, wird **Ortsvektor** (oder auch **Ortspfeil**) genannt. Der durch den Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ dargestellte Vektor $\vec{v}$ hat dieselben Koordinaten wie B .



Definition. Der Raum $\mathbb{R}^3$ ist die Menge der Zahlentripel

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \ ,$$

Jedem Punkt $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ entspricht wieder ein Ortsvektor
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

x_1, x_2, x_3 sind dann wieder die **Koordinaten** (bzw. **Komponenten** des Ortsvektors.

Bemerkung. Offenbar kann man analog zum $\mathbb{R}^2$ auch im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren durch räumliche Pfeile darstellen.

Definition. Der Raum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist die Menge aller $n-$Tupel

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \ : \ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Wiederum entspricht jedem Punkt $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Ortsvektor $\quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Bemerkung. Oft werden die Punkte des $\mathbb{R}^n$ mit ihren Ortsvektoren identifiziert.

Rechnen mit Vektoren.

Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Gleichheit: $\quad \vec{x} = \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2 \ , \ \ldots , x_n = y_n$

Summe und Differenz:

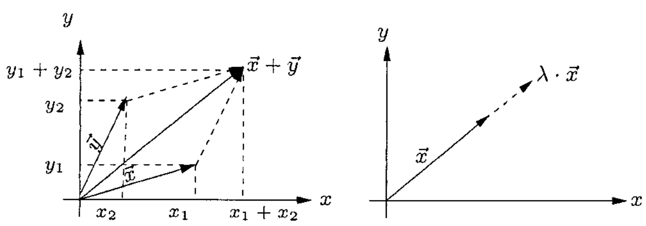
$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$$

Summen- und Differenzbildung zweier Vektoren erfolgt also komponentenweise.

Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Jede Komponente wird also mit dem (ungerichteten) Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert.



Rechengesetze.

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (Kommutativgesetz)
- $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (Assoziativgesetz)
- Der **Nullvektor** ist $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (alle Komponenten sind Null)
- $\vec{x} + \vec{O} = \vec{x} \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- Der **negative Vektor** $-\vec{x}$ zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist definiert durch

$-\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ und es gilt offenbar $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{O}$.

- Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare.

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$$

$$\lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda \cdot \vec{x}) + (\lambda \cdot \vec{y})$$

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Definition. Das **Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt**) von

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Der **Betrag** (bzw. die **Länge** bzw. die **Norm**) eines Vektors $\vec{x}$ ist definiert durch

$$|\vec{x}| = \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Zugehörige **Rechenregeln**:

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
2. $\langle \vec{x}, \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$
3. $\lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \lambda \cdot \vec{y} \rangle$
4. $\vec{x} \neq \vec{O} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$
5. $|\lambda \cdot \vec{x}| = |\lambda| \cdot |\vec{x}|$
6. $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (**Dreiecksungleichung**)

Definition. Der **Winkel** φ zwischen $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{O}\}$ ist definiert durch

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \quad \text{mit der Festsetzung} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \ .$$

Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, dann heißen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ **orthogonal** (aufeinander).

Geraden und Ebenen

Eine **Gerade** im $\mathbb{R}^n$ ist festgelegt durch einen Punkt $\vec{x}_0$ der Geraden und einen sogenannten **Richtungsvektor** $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Die Gleichung für die Gerade g lautet

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v} \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (\textbf{Parameterdarstellung})$$

Durchläuft der Parameter λ alle reellen Zahlen, werden alle Punkte $\vec{x}$ der Geraden durchlaufen.

Bemerkung. Sind zwei Punkte $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ gegeben, dann ist $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0$

ein Richtungsvektor der verbindenden Geraden.

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$x_1 = b_1 + \lambda v_1 \quad , \quad x_2 = b_2 + \lambda v_2$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann der Parameter λ eliminiert werden, und wir erhalten eine lineare Gleichung der Form

$$g : \; a_1 x_1 + a_2 x_2 = a \; .$$

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^3$ stellt eine lineare Gleichung der Form

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a$ eine **Ebene** dar.

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^3$ kann eine Ebene ebenfalls durch Angabe eines Punktes und zweier (linear unabhängiger) Richtungsvektoren angegeben werden und wir erhalten die **Parameterdarstellung**

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \quad , \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Wir wollen jetzt den **Normalabstand** von einem Punkt $\vec{x}_1$ auf eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{v}$ ermitteln. Dies ist der kürzeste Abstand des Punktes mit Ortsvektor $\vec{x}_1$ zum Lotpunkt L auf der Geraden mit Ortsvektor $\vec{x}_L$.

Der Lotpunkt bzw. der Vektor $\vec{x}_L$ ist dadurch bestimmt, dass $\vec{l} = \vec{x}_L - \vec{x}_1$ auf den Vektor $\vec{v}$ orthogonal ist.

$$\vec{x}_L \in g \; : \quad \vec{x}_L = \vec{x}_0 + \lambda \vec{v}$$

$$\langle \vec{l}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}_L - \vec{x}_1, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x}_0 + \lambda \vec{v} - \vec{x}_1, \vec{v} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \; .$$

Damit ist $\vec{x}_L = \vec{x}_0 + \frac{\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v}$.

Damit ergibt sich der Normalabstand $d(\vec{x}_1, g)$ mit

$$d(\vec{x}_1, g) = |\vec{l}| = |\vec{x}_0 + \tfrac{\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_0, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v} - \vec{x}_1| \ .$$

Wie schon erwähnt ist die Skalarform der Ebenengleichung durch

$E: \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a$ gegeben.

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ der Ebene E erhält man für die Ebenengleichung die Form

$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = a$ bzw. $\langle \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, x \rangle = \widetilde{a}$ (**Hesse'sche Normalform**)

wenn der normierte Normalenvektor $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ verwendet wird (dieser hat die Länge 1).

Bemerkung. Sind 3 Punkte $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ des $\mathbb{R}^3$ gegeben, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, dann gibt es genau eine Ebene, welche die drei Punkte enthält.

Mit $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0$ und $\vec{w} = \vec{x}_2 - \vec{x}_0$ ergeben sich zwei Richtungsvektoren der Ebene, und

$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ist die Gleichung der gesuchten Ebene.

Bemerkung. Der Abstand $d(\vec{y}, E)$ eines Punktes $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene E ist gegeben durch

$d(\vec{y}, E) = |\langle \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \vec{y} \rangle - \widetilde{a}|$ (siehe Hesse'sche Normalform)

Für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gibt es neben dem Skalarprodukt noch ein weiteres Produkt, nämlich das **Vektorprodukt** .

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor folgender Gestalt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

Dabei ist φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. $|\vec{c}|$ ist ein Maß für den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

2. $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.

3. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem (Reihenfolge wichtig!).

Es gelten folgende **Rechenregeln**:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear.
- Die Berechnung des Vektorprodukts kann auch (siehe später) mit Hilfe der Determinante erfolgen

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ und dann formale Entwicklung nach der 1. Zeile

Definition. Das **Spatprodukt** $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ der drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ist die skalare Größe

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \ .$$

Bemerkung. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ gibt das Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (=Spat) an.

Rechenregeln.

- $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$

- $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ liegen in einer gemeinsamen Ebene

- Die Berechnung des Spatprodukts kann auch (siehe später) mit Hilfe der Determinante erfolgen:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$