

04. Allgemeine Vektorräume

Definition. Ein **Vektorraum** (oder auch **linearer Raum**) ist eine beliebige nichtleere Menge V von Objekten (welche dann **Vektoren** genannt werden), für die eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren (meist aus \mathbb{R} oder \mathbb{C}) erklärt ist.

Die zuvor genannten Rechenregeln betreffend Addition und Multiplikation mit Skalaren müssen analog erfüllt sein.

Beispiel. \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n (siehe zuvor)

Beispiel. Sei X eine Menge und $F(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ die Menge aller Abbildungen (Funktionen) von X nach \mathbb{R} .

Für $f, g \in F(X, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erklären wir die Funktionen $f + g$ und λf durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dann ist $F(X, \mathbb{R})$ ein Vektorraum. Der Nullvektor ist hier die Nullfunktion, die jedem $x \in X$ den Wert Null zuordnet.

Definition. Ein **Teilraum** (oder auch **Untervektorraum**) eines Vektorraumes V ist eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\vec{x}, \vec{y} \in U \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in U$

2. $\vec{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{x} \in U$

(D.h. bei der Addition von zwei Vektoren aus U und der skalaren Multiplikation eines Vektors aus U wird der Teilraum nicht verlassen.)

Bemerkung. Ein Teilraum ist selbst wieder ein Vektorraum.

Beispiel. Eine Gerade im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 , die den Ursprung enthält, ist ein Teilraum.

Eine Ebene im \mathbb{R}^3 , die den Ursprung enthält, ist ein Teilraum.

Definition. Sei V ein Vektorraum (mit Skalaren aus \mathbb{R})

1. Seien $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Dann heißt der Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.

2. Die Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V$ heißen **linear unabhängig**, wenn gilt

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Das bedeutet, dass sich der Nullvektor **nur auf triviale Weise**, also mit $\lambda_i = 0 \ \forall i$ darstellen lässt.

Umgekehrt heißen $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ **linear abhängig** wenn sie nicht linear unabhängig sind, es also eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors gibt.

Beispiel. Gegeben seien $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

impliziert $2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Die beiden Vektoren sind damit linear unabhängig.

Beispiel. Die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

sind linear abhängig, weil

$$2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 - \vec{x}_3 = \vec{0}.$$

Bemerkung. Ist $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}$ und sind die Vektoren

$\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ linear abhängig, dann existiert ein $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $\lambda_i \neq 0$ und folglich gilt

$$\vec{x}_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + \lambda_k \vec{x}_k) .$$

D.h. einer der Vektoren lässt sich als Linearkombination der übrigen darstellen.

Gilt also etwa $2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 - \vec{x}_3 = \vec{0}$, dann erhält man

$$\vec{x}_1 = -\frac{1}{2}(3\vec{x}_2 - \vec{x}_3) \quad , \quad \vec{x}_2 = -\frac{1}{3}(2\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \quad , \quad \vec{x}_3 = 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2$$

Bemerkungen.

1. Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$ sind **immer** linear abhängig.
2. Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind, d.h. einer der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.
3. Drei Vektoren des \mathbb{R}^3 sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen, die den Ursprung enthält.
4. Ist für $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ der Vektor $\vec{x}_i = \vec{0}$, dann sind die Vektoren linear abhängig, weil

$$0 \cdot \vec{x}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_{i-1} + 1 \cdot \vec{x}_i + 0 \cdot \vec{x}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \vec{x}_k = \vec{0}$$

Definition.

1. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V heißt die **Dimension** von V , $\dim V$.
2. Ist $\dim V = m$, dann heißt ein System $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$ von linear unabhängigen Vektoren eine **Basis** von V .

Bemerkung. Ein und derselbe Vektorraum kann viele verschiedene Basen haben.

Bemerkung. Im \mathbb{R}^n ist

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die sogenannte **Standardbasis** (bzw. **kanonische Basis**).

Definition. Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ Vektoren des Vektorraums V . Die Menge aller Linearkombinationen $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$ mit beliebigem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ heißt der von den Vektoren $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ **aufgespannte Raum** bzw. der **Span** von $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$.

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \{\vec{v} : \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung. $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ ist wieder ein Vektorraum.

Satz. Ist $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine Basis des Vektorraums V , dann lässt sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ in **eindeutiger** Weise als Linearkombination der Basisvektoren schreiben.

Beispiel. Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Dann ist (\vec{a}, \vec{b}) eine Basis des \mathbb{R}^2 .

Bezüglich der kanonischen Basis (\vec{e}_1, \vec{e}_2) gilt

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 5 \cdot \vec{e}_2$$

Bezüglich der Basis (\vec{a}, \vec{b}) gilt

$$\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition. Eine Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ des \mathbb{R}^n heißt eine **Orthonormalbasis (ONB)**, wenn die Basisvektoren paarweise orthogonal aufeinander

stehen und normiert sind (d.h. die Länge 1 haben). D.h.

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Gegeben sei nun ein System von m linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m$ im Vektorraum V . Sei $W = \text{Span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$. Dann ist $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m)$ eine Basis von W .

Im **Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt** wird daraus eine Orthonormalbasis $(\vec{b}'_1, \dots, \vec{b}'_m)$ von W konstruiert.

1. Schritt: Bilde den Vektor $\vec{b}_1^* = \vec{b}_1$ und weilers sukzessive

$$\vec{b}_k^* = \vec{b}_k - \frac{\langle \vec{b}_k, \vec{b}_1^* \rangle}{\langle \vec{b}_1^*, \vec{b}_1^* \rangle} \cdot \vec{b}_1^* - \frac{\langle \vec{b}_k, \vec{b}_2^* \rangle}{\langle \vec{b}_2^*, \vec{b}_2^* \rangle} \cdot \vec{b}_2^* - \dots - \frac{\langle \vec{b}_k, \vec{b}_{k-1}^* \rangle}{\langle \vec{b}_{k-1}^*, \vec{b}_{k-1}^* \rangle} \cdot \vec{b}_{k-1}^* \quad , \quad k = 2, \dots, m$$

$(\vec{b}_1^*, \dots, \vec{b}_m^*)$ bilden dann ein orthogonales System.

2. Schritt: Die erhaltenen Vektoren werden nun normiert

$$\vec{b}'_i = \frac{\vec{b}_i^*}{|\vec{b}_i^*|} \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

und wir erhalten die gesuchte Orthonormalbasis für W .