06. Matrizenrechnung

Für Matrizen können nun verschiedene Operationen erklärt werden.

1. Addition von zwei Matrizen

Seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M(m \times n)$ gegeben. D.h. **beide** Matrizen haben m Zeilen und n Spalten. Dann ist

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M(m \times n)$$

Die Addition erfolgt also elementweise.

2. Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \in M(m \times n)$$

Alle Elemente der Matrix werden mit λ multipliziert.

3. Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Bezeichnet $\vec{z}_i$ den $i-$ten Zeilenvektor von A , dann ist offenbar die $i-$te Komponente von $A \cdot \vec{x}$ gleich $\langle \vec{z}_i, \vec{x} \rangle$, also

$$A \cdot \vec{x} = (\langle \vec{z}_i, \vec{x} \rangle) \in M(m \times 1) = \mathbb{R}^m$$

Beachte, dass 3. ein Spezialfall von 4. ist.

4. Multiplikation von zwei Matrizen

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ und $B = (b_{kl}) \in M(n \times p)$.

Wichtig! Damit das Produkt $A \cdot B$ definiert ist, muss die Spaltenanzahl von A gleich sein der Zeilenanzahl von B !

In diesem Fall ist

$$A \cdot B = C = (c_{il}) \in M(m \times p) \quad \text{mit} \quad c_{il} = \langle \vec{z}_i, \vec{s}_l \rangle$$

wobei $\vec{z}_i$ der $i-$te Zeilenvektor von A und $\vec{s}_l$ der $l-$te Spaltenvektor von B ist.

Rechenregeln für Matrizen

Seien $A \in M(m \times n)$, $B, C \in M(n \times p)$, $D \in M(p \times r)$ sowie

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $A \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot (A \cdot \vec{x})$
- $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$
- $\lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (Distributivgesetz)
- $A \cdot (B \cdot D) = (A \cdot B) \cdot D$ (Assoziativgesetz)
- $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im allgemeinen)

Definition. Die ($n-$reihige) **Einheitsmatrix** $I = I_n = E_n$ ist eine quadratische $n \times n$ Matrix, die wie folgt definiert ist

$$I = (\delta_{ij}) \quad \text{wobei} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

D.h. die Einheitsmatrix hat folgende Gestalt

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und allgemein}$$

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wird eine Matrix $A \in M(m \times n)$ geeignet mit der Einheitsmatrix multipliziert, so erhält man wieder die Matrix A .

$$I_m \cdot A = A \quad , \quad A \cdot I_n = A$$

Definition. Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n)$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn sie folgende Gestalt besitzt

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

D.h. Alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, sind notwendigerweise gleich Null. Die Einheitsmatrix ist ein spezielles Beispiel für eine Diagonalmatrix.

Definition. Sei $A \in M(m \times n)$. Dann heißt die $n \times m$ Matrix, die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die zu A **transponierte Matrix** A^T .

Gilt für eine Matrix $A^T = A$, so wird sie als **symmetrisch** bezeichnet.

(Neben der Schreibweise A^T wird auch die Bezeichnung A^t verwendet.)

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n \times 1) \quad , \quad \vec{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M(1 \times n)$$

Rechenregeln.

- $\vec{x}^T \cdot \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$
- $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (Vertauschung der Reihenfolge!!)