07. Determinanten

Im folgenden betrachten wir stets **reelle** quadratische $n \times n$ Matrizen. Analoge Aussagen gelten auch, wenn eine komplexe Matrix vorliegt.

Definition. Die **Determinante** det ist eine Abbildung

$$\det : M(n \times n) \to \mathbb{R} \quad , \quad A \mapsto \det A = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bemerkung. Sind die Einträge der Matrix komplexe Zahlen, dann ist auch die Determinante i.a. eine komplexe Zahl.

In welcher Weise die Determinante gebildet wird, soll nun im Einzelnen erklärt werden.

n=1: $A = (a_{11}) \quad , \quad \det A = a_{11}$

n=2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

n=3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Geometrisch interpretiert gibt die Determinante einer 3×3 Matrix das orientierte Volumen des von den drei Spaltenvektoren der Matrix aufgespannten Parallelepipeds an (siehe Spatprodukt).

$$V = \langle \vec{s}_1, (\vec{s}_2 \times \vec{s}_3) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right] \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ -a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Bemerkung. Die Berechnung einer 3×3 Matrix kann relativ einfach über die **Regel von Sarrus** durchgeführt werden.

Dabei werden die erste und zweite Spalte noch einmal neben der Matrix angeschrieben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Aus der so erhaltenen 3×5 Matrix addiert man die Produkte der Elemente in den drei "Hauptdiagonalen" und substrahiert davon die Produkte der Elemente in den drei "Nebendiagonalen".

Wir betrachten nun eine allgemeine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n)$.

Definition. Ist a_{ij} ein Element der Matrix A , dann heißt A'_{ij} das **algebraische Komplement** von a_{ij} . Dabei ist

$$A'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Das heißt, man streicht in der Matrix A die $i-$te Zeile und die $j-$te Spalte und bildet von der so erhaltenen $(n-1) \times (n-1)$ Matrix die Determinante.

Satz. (**Entwicklungssatz nach Laplace**)

Eine Determinante kann nach jeder Zeile bzw. jeder Spalte "entwickelt" werden. Es gilt

Entwicklung nach der $i-$ten Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A'_{ij}$

Entwicklung nach der $j-$ten Spalte: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A'_{ij}$

Dabei sind die Vorzeichen gemäß dem folgenden Vorzeichenschema definiert

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & \cdots & \\ + & - & \cdots & & \\ - & \cdots & & & \\ \cdots & & & & \end{vmatrix}$$

An der $i-$ten Zeile und der $j-$ten Spalte findet man also das Vorzeichen $(-1)^{i+j}$.

Bemerkung. Mit diesem Satz kann nun sehr einfach die Determinante einer **Dreiecksmatrix** bestimmt werden.

Eine **obere Dreiecksmatrix** (analog untere Dreiecksmatrix) ist eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alle Elemente **unterhalb** der Hauptdiagonale sind gleich Null. Elemente der Hauptdiagonale können Null oder ungleich Null sein.

Sukzessive Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Insbesondere ergibt sich für die **Einheitsmatrix** I dass $\det I = 1$.

Rechenregeln für Determinanten.

1. Stimmen zwei Spalten (bzw. zwei Zeilen) von A überein, dann ist $\det A = 0$.

$$A = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) \quad \Rightarrow \quad \det A = 0$$

2. Vertauscht man in der Matrix zwei verschiedene Spalten (bzw. Zeilen), dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante

$$\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_j, \ldots, \vec{s}_n) = -\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_j, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n)$$

3. Die Determinante ist linear in jeder Spalte (bzw. Zeile)

(a) $\det(\vec{s}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) = \lambda \cdot \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

(b) $\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i + \vec{\sigma}_i, \ldots, \vec{s}_n) =$

$\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) + \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{\sigma}_i, \ldots, \vec{s}_n)$

4. $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

5. Addiert man das $\lambda-$fache ($\lambda \in \mathbb{R}$) der $i-$ten Spalte (bzw. Zeile) zur $j-$ten Spalte (bzw. Zeile), wobei $i \neq j$, dann ändert sich der Wert der

Determinante nicht

$$\det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_j + \lambda \cdot \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_n) = \det(\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_i, \ldots, \vec{s}_j, \ldots, \vec{s}_n)$$

6. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad$ für $\; A, B \in M(n \times n)$

7. $\det(A + B) \neq \det A + \det B$

8. $\det(A^T) = \det A$

Bemerkung. Bei der praktischen Berechnung von Determinanten kombiniert man meist das Gauss'sche Eliminationsverfahren mit dem Entwicklungssatz. Durch Erzeugung von möglichst vielen Nullen in einer Zeile bzw. Spalte vereinfacht sich die Anwendung des Entwicklungssatzes ganz wesentlich.

Die Cramer'sche Regel.

Ist anwendbar für Gleichungssysteme der Form

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $A \in M(n \times n)$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und rang $A = n$ ($\Rightarrow \quad \det A \neq 0$)

Dann ist das System eindeutig lösbar und die $i-$te Komponente x_i des Lösungsvektors $\vec{x}$ ist gegeben durch

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{1,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} \quad , \; i = 1, \ldots, n$$

Die Determinante im Zähler erhält man, indem die $i-$te Spalte von A durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzt wird.

Beispiel.

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; , \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det A = -2$ und

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{5}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}$$