10. Orthogonale Matrizen

Definition. Eine quadratische Matrix $T \in M(n \times n)$ heißt **orthogonal** , falls

$$T^T = T^{-1}$$

Bemerkungen.

1. T ist orthogonal $\Leftrightarrow$ $T \cdot T^T = T^T \cdot T = I$
2. T ist orthogonal $\Rightarrow$ T^{-1} und T^T sind orthogonal
3. T ist orthogonal $\Rightarrow$ $\det T = \pm 1$

Satz. Die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix $T \in M(n \times n)$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

Satz. Bei einer Koordinatentransformation mit einer orthogonalen Transformationsmatrix wird ein kartesisches Koordinatensystem wieder in ein solches übergeführt.

Bemerkung. Falls T eine orthogonale Matrix ist, wissen wir, dass $\det T = \pm 1$.

Der Fall $\det T = +1$ beschreibt eine **Drehung** im $\mathbb{R}^n$, der Fall
$\det T = -1$ beschreibt eine **Drehspiegelung** im $\mathbb{R}^n$,

Beispiel.

Sei $T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Dies ist eine Drehung um den Winkel φ ($\det T = +1$).

Man rechnet leicht aus, dass $T \cdot T^T = I$, also ist T orthogonal.

Beispiel.

Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $T \cdot T^T = I$ und $\det T = -1$, also liegt eine Drehspiegelung vor.

$$\vec{x}' = (T^T)^{-1} \cdot \vec{x} = (T^{-1})^{-1} \cdot \vec{x} = T \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$